Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1900)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE DÉVELOPPEMENT ET L'ÉTAT ACTUEL DE LA GÉOMÉTRIE A n DIMENSIONS

Autor: Schlegel, Dr Victor

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3554

SUR LE DÉVELOPPEMENT ET L'ÉTAT ACTUEL

DE LA GÉOMÉTRIE A n DIMENSIONS [1]

Une nouvelle branche des sciences mathématiques, la Géométrie à n dimensions, s'est développée progressivement dans la seconde moitié du siècle. Dans le vaste domaine qu'elles se sont ouvert, ces recherches ont été fécondes en résultats importants et, de plus, la Géométrie limitée au champ déjà connu leur doit des points de vue nouveaux faisant apparaître en particulier les méthodes dans leur signification la plus claire.

Actuellement, il semble que l'enseignement doive commencer à tenir compte des développements que nous venons de signaler. et cela d'autant plus que l'étude des domaines avec plus de quatre dimensions a provoqué des améliorations et des extensions dans la représentation géométrique en général. En essayant de résumer pour cette revue les travaux considérables relatifs à ce sujet et en les référant à une nomenclature aussi complète que possible, nous espérons que notre tentative sera bien accueillie par les lecteurs que les questions nouvelles intéressent.

I

On ne saurait dire que la notion d'espaces et de figures à dimensions multiples doive son origine aux recherches géométriques contemporaines. Elle existait depuis longtemps en germe :

---

(1) La première partie de ce mémoire a paru en 1886 dans le recueil allemand *Leopoldina* et l'auteur a rédigé la seconde partie, qui donne à ce travail son actualité, pour son insertion dans *l'Enseignement mathématique*. Il est accompagné d'un *Index bibliographique* dans l'ordre alphabétique des auteurs cités; c'est à cet Index que se réfèrent les numéros mis entre parenthèses dans le texte.

puisqu'on avait reconnu que le mouvement par lequel la droite résulte du point, le plan de la droite et l'espace du plan implique chaque fois l'existence d'une dimension de plus, on pouvait par la pensée continuer indéfiniment ce mode de génération, bien que *l'intuition* [1] des figures cessât d'être possible. Toutefois, le caractère empirique de la Géométrie fit d'abord condamner cette incursion au delà de l'intuitif comme inutile, contraire à l'expérience et même absurde. La notion dont il s'agit trouva dans la Géométrie analytique un puissant élément de progrès. La représentation des lignes et des surfaces par des équations à deux et trois variables conduit à la question : comment les équations à quatre variables doivent-elles être interprétées ? Dans d'autres domaines l'analyse forçait directement la Géométrie à sortir de l'intuitif : les racines imaginaires font admettre un champ qui n'est pas réel et la notion de l'infiniment grand implique des figures infiniment éloignées ; or, par l'emploi de ces innovations les restrictions de certaines propositions de Géométrie disparurent.

Ce fut en essayant vainement de démontrer le postulatum d'Euclide que l'on franchit pour la première fois les limites de la Géométrie expérimentale. Déjà en 1792, GAUSS (140) concevait le principe d'une Géométrie dans laquelle le postulatum n'est pas valable, et BOLYAI en 1832 (39), LOBATSCHEWKY en 1840 (231) le développèrent avec une ampleur de déduction telle que ces deux savants sont les fondateurs d'une Géométrie transcendantale [2] caractérisée en particulier par ce fait que la somme des angles du triangle < 2 droits. Mais il n'existait aucun domaine qui permît de contrôler par des résultats valables ce qui pouvait sembler des paradoxes et ces recherches restèrent ignorées. RIEMANN en 1854 (310) et HELMHOLTZ en 1868 (152) furent conduits, par des recherches analytiques sur la différentielle de l'élément linéaire, à imaginer des espaces satisfaisant à certaines formules générales dont l'espace euclidien est un cas particulier. Ceci constituait un double progrès : d'une part, aux deux possibilités de la Géométrie

---

[1] Par *intuitif* l'auteur entend susceptible d'être vu intuitivement ou immédiatement.

[2] Cette géométrie est appelée par Gauss *non euclidienne*, par Bolyai *absolue*, par Klein *hyperbolique*.

euclidienne et de celle de Lobatschewsky venait s'en ajouter une troisième, à savoir que la somme des angles du triangle > 2 droits; de l'autre, les résultats nouveaux s'appliquaient aux espaces à dimensions multiples. L'introduction de la notion de courbure permettait de caractériser avec précision le domaine de la Géométrie non euclidienne. Beltrami en 1868 (20) avait montré que la surface à courbure négative constante réalisait les résultats de Lobatschewsky ; on put constater que la troisième possibilité avait pour champ d'interprétation la surface sphérique à courbure positive constante. Ainsi se formèrent les conceptions des formes d'espace de Lobatschewky à courbure constante négative et de Riemann (positive) pour un nombre quelconque de dimensions.

C'est d'un tout autre point de départ que procédèrent les travaux de Grassmann que je ne fais que mentionner ici, leur objet essentiel étant le *calcul géométrique*. Par une conception d'importance fondamentale, il créa, sans rien emprunter à la Géométrie analytique, une analyse parfaitement adéquate à la recherche géométrique, réalisant l'idéal entrevu par Leibniz (216). Cette méthode capable d'extension dans le domaine des dimensions multiples fut exposée dans toute sa généralité dans l'Ausdehnungslehre en 1844 (146). Cet ouvrage contient tous les principes d'une Géométrie à n dimensions, et il faut en signaler la portée en ce sens que la Géométrie réelle apparaît comme l'application de la science abstraite de l'extension à l'espace représentable. Les principes établis par Grassmann (146) ont été énoncés plus tard par Erdmann (120) sous une forme nouvelle.

Toute une série de travaux se rattachent à ceux de Riemann et de Helmholtz et sont essentiellement analytiques. Il s'agit de fonctions de n variables, de problèmes de transformations, d'expressions pour la mesure de la courbure, et les résultats géométriques sont plutôt des interprétations des résultats analytiques que le but qu'on se propose. La généralisation d'une formule à deux ou trois variables est indiquée comme s'appliquant aux M_n [1]. Dans cette catégorie se rangent les travaux de Kronecker (209),

[1] Dans ce qui suit on emploie les abréviations suivantes : R^n signifie espace linéaire (droite, plan, etc.) à n dimensions; M_r^p espace courbé (courbe, surface, etc.) à r dimensions et d'ordre p; G_n, Géométrie à n dimensions.

Beez (19), Lipschitz (221-228), Christoffel (94), etc. Les géomètres spécialistes se tenaient sur la réserve à l'égard de ces incursions dans le transcendantal, bien justifiés en pensant qu'il y avait encore beaucoup à trouver dans l'espace euclidien et dans le plan ; mais les expressions propres à la G_n se naturalisaient dans le langage mathématique et la nécessité de relier aux autres connaissances ce nouveau domaine s'imposait de plus en plus. Bien que la Géométrie du plan et de l'espace eût été libérée des liens de l'analyse par Steiner dont la force d'imagination donnait à ses recherches une valeur indépendante de sa méthode, et que Grassmann eût depuis longtemps trouvé un mode de calcul propre à la Géométrie abstraite, c'est encore aux méthodes usuelles de la Géométrie analytique qu'ont recours la plupart des savants dont il faut rappeler les noms. Betti (35) s'est occupé des principes généraux d'une Géométrie analytique à n dimensions et a traité entre autres des rapports linéaires, de la limitation et du fractionnement des M_n. Lie (217, 218) a étudié les figures correspondant aux lignes et aux surfaces, l'intersection orthogonale, la sphère à n dimensions et a donné une extension du théorème de Dupin. Jordan (186-188) a établi les conditions des directions parallèles et perpendiculaires de champs plans, a étudié leurs invariants-simultanés et a étendu le principe de la substitution orthogonale et ceux de la théorie des courbes relatifs à la courbure ; de plus on lui doit des recherches trigonométriques et cinématiques. Une partie de ces résultats, ce qui concerne le principe d'Euler sur la rotation autour d'un point fixe, avaient été aussi obtenus par Schlaefli (327). Frahm (136) a considéré ce même problème de Mécanique dans un R_{n+1}. G. Cantor (63, 64) a montré comment le nombre des variables dont dépend la position d'un élément dans le R_n se réduit lorsque cet espace cesse d'être continu et a étudié les relations de deux points dans des champs de cette nature. Netto (254) a démontré que la relation réciproque entre deux champs à m et à n dimensions ne peut pas être en même temps continue et univoque. S. Kantor (189) a étudié les transformations linéaires dans le R_n dont Eichler (112) s'était déjà occupé. Pilgrim (289) a déterminé le nombre de parties dans lesquelles un R_k est partagé par n R_{n-1}. Brunel (56) a étudié les propriétés métriques des courbes dans le R_n et KRETKOWSKY (208) a donné les coordonnées d'un point équidistant de $n + 1$ points dans un R_n. Enfin GENOCCHI (142) a attiré l'attention sur le fait que celles des recherches de CAUCHY (84) qui peuvent être rattachées à la G_n sont antérieures à 1847.

Les travaux déjà mentionnés de Beez et Lipschitz font partie d'une autre catégorie concernant les multiplicités avec courbure, comprenant aussi les recherches d'OVIDIO (260) sur les rapports des métriques, de KILLING (194) sur diverses formes d'espaces, de SCHERING (324) sur les figures dans ces champs, et sur la pesanteur et autres forces, de BELTRAMI (21) sur les lignes géodésiques, de GEISER (141) sur une question de maximum, énumération qui n'a pas la prétention d'être absolument complète.

Entre temps il faut signaler des tentatives pour transporter dans un domaine représentable les résultats de la G_n. En 1870, CAYLEY (85) considéra les coefficients de l'équation d'une courbe assujettie à certaines conditions comme les coordonnées d'un point dans une multiplicité. SPOTTISWOOD (404, 405) attaqua directement le problème en partageant en groupes de trois éléments les variables d'une équation, le dernier groupe pouvant renfermer deux ou une variable. Si l'on considère alors les éléments d'un groupe comme des variables et les autres comme des paramètres, l'équation constitue pour chaque groupe un système de surfaces et tous ces systèmes dans leur ensemble donnent l'image géométrique de l'équation. HALPHEN (149) projeta une $M_{(n-1)}$ sur $(n-2)$ R_3 et VERONESE (419-421) appliqua d'une manière systématique le principe de la projection et de l'intersection à l'étude des relations projectives. CRAIG (99) représenta une surface, donnée par deux équations à quatre variables dans R_4, par une surface dans R_3 satisfaisant à la condition de similitude des éléments infinitésimaux. Il faut rappeler des essais de représentation d'une M_4 dans R_3 fondés dans la plupart des cas sur la substitution d'un élément représentable, la densité par SCHEFFLER (321), la coloration par MOST (249) à la quatrième dimension. Les considérations par lesquelles DUHRING (107) assimila la Mécanique de Lagrange à une G_4 rentrent dans cet ordre de travaux ; la plus ancienne des tentatives de ce genre est sans doute celle du spiritiste anglais Henry More au XVII[e] siècle qui, du reste, comme l'a montré ZIMMERMANN (436), ne cherchait pas dans une quatrième dimension un élément analogue aux trois dimensions. Ces essais ne semblent pas avoir amélioré la représentation des figures et de plus il est fâcheux d'introduire un élément étranger à la recherche mathématique pure. Dans cette question il ne reste d'autre parti à prendre que de sacrifier les dimensions d'ordre élevé et de ne représenter les figures que par leurs projections d'après les méthodes usuelles, et ce procédé n'est réalisable que s'il s'agit de passer d'un champ au champ immédiatement inférieur.

La méthode projective donne lieu au procédé probablement le meilleur pour obtenir la compréhension des M_n. En se guidant sur le passage du plan à l'espace, on peut passer de R_3 à R_4 et aller au delà en renonçant à toute représentation. Cette manière de procéder s'est montrée féconde ; elle a conduit à la conception du corps à quatre dimensions limité par des corps à trois dimensions. Aux plus anciens travaux de ce genre appartiennent ceux de RUDEL (314-316) sur les rapports des points, droites, plans et espaces dans R_4, sur les plans qui se croisent et sur la congruence et la symétrie. On doit à HOPPE (159-169) une série importante de recherches dans lesquelles, partant d'une extension plane d'un grand nombre de conceptions spatiales, il a découvert une foule de propriétés des M_n et donné un ensemble de résultats intéressants sur la métrique de R_4. La considération de la figure limitée a conduit plusieurs des auteurs cités auxquels il faut joindre DURÈGE (108) à l'extension du principe d'Euler sur les polyèdres aux M_n. G. CANTOR (65-66) a étendu à R_n ses recherches sur les multiplicités de points. KANTOR (190) s'est occupé, ainsi que SCHUBERT (349, 350) des configurations dans R^n, tandis que STUDY (411), par la méthode des déterminants, a donné un grand nombre de propositions sur les angles, les pyramides et les puissances par rapport à un cercle. Un ouvrage de MEHMKE (242) traite les mêmes sujets et par l'application de la méthode de Grassmann donne l'extension des propriétés des points singuliers du triangle. Cette même méthode a servi à SCHLEGEL [1] (328) pour étendre les propriétés des points harmoniques, des média-

[1] L'auteur du présent mémoire.

nes et du centre de figure du triangle aux figures analogues dans R .

Les nouvelles notions représentatives ont aussi trouvé leur application dans la Géométrie projective. Déjà en 1872, dans ses recherches sur les équations différentielles partielles, Darboux (101) était arrivé à déterminer les transformations de contact dans R_n. Des recherches ultérieures (102) l'on fait renoncer à l'emploi de projections tirées de R_4, à cause de son défaut d'utilité pratique. En connexion avec les travaux de Lie, Klein (205, 206) a établi la liaison entre la Géométrie réglée et la Géométrie métrique de R_4 avec extension à R_n. Ségre (366, 367, 370) a donné un exposé détaillé des propriétés des surfaces du quatrième ordre à double section conique, en les considérant comme projection centrale, de la section de deux figures quadratiques à trois dimensions dans R_4, sur R_3. Dans l'ouvrage de Meyer (423, 424) sur l'apolarité et sur les courbes rationelles, des extensions d'une grande généralité sont obtenues au moyen des ressources de l'Algèbre moderne.

Il faut parler ici d'un problème d'un intérêt spécial consistant à déterminer les figures régulières de l'espace plan à quatre dimensions qui correspondent aux polygones et aux polyèdres réguliers. Vu l'irrégularité présentée par le fait qu'il existe une infinité des premiers et seulement cinq des seconds, l'attention est attirée sur ce qui a lieu dans R_4. Rappelons seulement que la figure ne doit être limitée que par des polyèdres réguliers et que à chaque sommet et sur chaque arête le même nombre de ces solides se joignent. Citant pour mémoire un essai insuffisant de Emsmann (113) pour trouver les figures correspondant au triangle et au tétraèdre, il faut mentionner Hoppe (159) qui a défini cette figure et déterminé son volume ainsi que ses analogues dans les champs plus élevés. A cette série Scheffler (321) a joint celle qui commence par le carré et le cube, et montré qu'en laissant de côté la condition d'égalité des arêtes, la solution dans R_n est celle des racines d'une équation du $n^{ième}$ degré. Rudel (317), qui trouva ces mêmes séries, donna onze procédés pour construire les figures régulières de R_4 ; mais les deux seuls utilisables conduisent aux deux séries ci-dessus et c'est en construisant leurs projections sur R_3 qu'on parvient aux autres figures. Ces projections sont des figures composées d'un certain nombre de polyèdres. On peut les obtenir de deux manières : soit en procédant du dedans vers le dehors par une formation progressive, soit du dehors vers le dedans par une décomposition. STRINGHAM (406) et HOPPE (170) ont obtenu la solution complète du problème, en employant l'un ou l'autre des procédés. SCHLEGEL (329) a employé le second procédé également avec succès. Il résulte de ces recherches que l'on connaît dans R_4 six figures régulières respectivement limitées par 5, 16, et 600 tétraèdres, 8 hexaèdres, 24 octaèdres et 120 dodécaèdres [1]. De plus, Stringham a établi que les trois séries commençant respectivement: 1) par le triangle, le tétraèdre, le pentaédroïde (limité par cinq tetraèdres); 2) par le carré, l'hexaèdre, l'octaédroïde (limité par huit hexaèdres); 3) par le carré, l'octaèdre, l'hexadécaédroïde (limité par 16 tetraèdres) continuent dans toutes les multiplicités et que dans tout R_n supérieur à R_4 il n'existe pas d'autre figure régulière. Qu'il me soit permis d'ajouter qu'en renonçant à la régularité des figures limites j'arrive à une plus grande généralité pour les figures elles-mêmes et que j'obtiens nombre de résultats relatifs à la courbure et à la théorie métrique. FORCHHAMMER (135) est également parvenu aux solutions mentionnées; PUCHTA (296, 297), a traité la question par l'Analyse. SCHAPIRA (319) a remarqué que les nombres figurés qui se présentent dans la multiplication abélienne de séries infinies trouvent leur signification dans les figures régulières de multiplicité élevée.

Des recherches de ce genre ont de l'importance en raison des nouveaux aperçus qu'elles ouvrent sur la Géométrie du plan et de l'espace, sur le Calcul différentiel et la Mécanique. C'est ainsi que LIE (219) en a tiré une nouvelle méthode d'intégration. La dépendance des propositions analogues dans le plan et l'espace est élucidée par l'extension à G^n. Il arrive aussi qu'on obtient des résultats nouveaux en spécialisant les propositions relatives à R_n. Le théorème de HALPHEN (149) sur le nombre de points doubles dans une courbe du $m^{ième}$ ordre en est un exemple.

---

[1] Des modèles des solides de projection sont fournis par la librairie Martin Schilling, à Halle.

II

Ce qui précède permet de constater la grande diversité de directions qu'ont suivies les premières recherches sur les espaces à dimensions multiples durant une période d'environ quinze ans (1871-1886). Depuis lors, les difficultés du début étant surmontées et les arguments des contradicteurs réfutés, l'activité scientifique a produit une si riche littérature que, dans un simple aperçu historique comme celui-ci, il nous est impossible de mentionner autre chose que les traits fondamentaux et les résultats caractéristiques de ces travaux.

Bien que d'une manière générale, la G_n ait obtenu gain de cause, divers travaux ont pour objet de démontrer que cette science est un développement logique et progressif de la Géométrie (202,333) ; d'autres tendent à écarter des méprises ou à expliquer comment les géomètres conçoivent l'espace à plusieurs dimensions et, en particulier, l'espace à quatre dimensions (252, 147, 240, 183). Il existe de nouveaux procédés qui, par une transformation à l'espace ordinaire, rendent représentable la Géométrie des hyperespaces (430, 131, 258, 256). Réciproquement, par un passage inverse, des problèmes trouvent leur solution. Klein (207), par exemple, définit les coefficients d'une équation du $n^{ième}$ degré, comme coordonnées ponctuelles variables dans un R_n, et par ce moyen rend possible le dénombrement des racines réelles. Fano (124) considère une congruence de droites du $n^{ième}$ ordre et de $n^{ième}$classe, comme une $M_2^{\ m+n}$ dans une M^2_4 du R_5. Frattini appelle (137), « groupes de k dimensions », ceux dont les éléments peuvent être caractérisés par k indices. Segre (389) considère les groupes de k points pris isolément dans k espaces, Rp, Rq....., comme éléments d'une M_ς (où $\varsigma = p + q + ...$). Les *applications à la Physique* ne font pas non plus défaut. Ball (16) cherche, pour expliquer la nature de l'éther et de la pesanteur, à obtenir un corps homogène élastique, par le principe d'un mouvement infiniment petit dans une quatrième dimension. Staeckel (407) fait correspondre à chaque problème de Dynamique celui d'un mouvement d'un point dans un

R_n, dont la solution dépend du même problème analytique ; il traite (407) une classe remarquable de mouvements dans un R_n, et peut ainsi suivre intuitivement le cours du mouvement.

Brunel (57), Andrade (6), Joly (185) s'occupent de *généralisations analytiques*, Killing (190) étudie de nouvelles configurations se rattachant à cette Géométrie. Dickstein (106) et Galdeano (138, 139) fournissent des documents sur la littérature du sujet.

Schendel (323) remarque que les *déterminants* de rangs supérieurs déjà étudiés par von Escherich, trouvent leur représentation naturelle par un groupement de leurs éléments à l'intérieur d'un corps à plusieurs dimensions correspondant au carré et au cube. Sharp (392, 393) exprime, par des déterminants de cette espèce, le volume et les autres propriétés de la « figure régulière » à n dimensions qui est limitée par $n + 1$ corps à $n - 1$ dimensions ; et Rahnsen (301) découvre au moyen de déterminants les propriétés de divers corps à n dimensions.

Aux *corps à plusieurs dimensions* se rattache d'ailleurs une littérature si abondante, que seule, celle de la Géométrie projective dans le R_n, peut lui être comparée. Toute une série de travaux s'occupe exclusivement des *corps réguliers*. Rudel (318) étend sa méthode de détermination des deux premières séries de ces corps se continuant dans tous les espaces, à la troisième série, confirmant ainsi les résultats de Stringham. Schlegel (334, 338) obtient la représentation de ces trois séries de corps sur le plan. Heyl (156) fait des modèles de projection des corps réguliers à quatre dimensions, mais ne s'en tient pas à un principe unique ; aussi ne s'accordent-ils qu'en partie avec ceux construits autrefois par Schlegel. Hall, Schoute et Brueckner étudient les corps réguliers du R_4 : Hall (148) construit des formes de corps de projections pour les trois plus simples, Schoute (343, 364) étudie les sections et projections régulières des cinq plus compliquées, Brueckner (55) résume les propriétés des six corps en les reliant aux résultats de la géométrie élémentaire du R_4. Il faut encore citer Galdeano (138) qui décrit des modèles de projection, Schoute (341) qui réunit les propriétés élémentaires connues jusqu'à présent des corps cités plus haut, Biermann (97) qui, par intégration, détermine la surface et le volume de la sphère à n dimensions, et un *anonyme* (183). La formation des *carrés magiques* est étendue par Schlegel (337) et plus tard par Arnoux (7, 211) au cube à n dimensions, et ces corps numériques sont représentés systématiquement dans le plan. La *première série* des corps réguliers, avec $n + 1$ sommets, est le sujet de nombreuses études. Leurs volumes sont déterminés par Loria (234), Liers (220), Clifford (95) et Cesaro (86) qui calcule aussi leurs médianes ainsi que leurs moments d'inertie, ceci comme application au calcul des probabilités ; Hoppe (175, 176) utilise leurs axes d'inertie principaux comme axes de coordonnées pour les sommets du corps, il calcule pour les corps à n dimensions ayant $n + 1$ et $n + 2$ sommets, l'expression $\int z^n dV$, déjà déterminée par Routh pour le triangle, le tétraèdre le quadrilatère et le pentaèdre. Sylvester et Sharp) 394, 396, 398) enfin trouvent d'autres propriétés de ces corps.

Les partages d'espace se rattachent à la théorie des corps réguliers. Dans ce domaine, Eberhard (111) étend au R_n des théorèmes de Steiner, Euler, Cauchy, Listing ; Hess (153, 154) et Schlegel (336) utilisent les corps réguliers du R_4 dans le but de déterminer, pour l'espace à trois dimensions, de courbure constante, des partages réguliers ; Goursat (143) passe réciproquement du partage d'espace aux projections à trois dimensions des corps réguliers du R_4. Schoute (345) donne enfin trois systèmes de partage pour l'espace à n dimensions.

Les corps réguliers ont pris une plus grande importance par l'étude des *transformations* qui ramènent un corps de ce genre à lui-même. Goursat (146), le premier, étend ces recherches aux corps du R_4, en donnant à la théorie de ces corps, par la détermination des groupes de substitutions linéaires à quatre variables et d'ordre fini, les fondements analytiques qui la mettent dans le rapport le plus étroit avec la théorie de la transformation. Ensuite, van Oss (259) examine les groupes de mouvements de ces corps, Maschke (241) représente le groupe de rotation, par le diagramme des couleurs de Cayley ; Biermann (38), par une substitution linéaire d'une variable complexe fait revenir sur eux-mêmes les sommets des corps réguliers du R_3.

On étudie aussi les figures de plusieurs corps non réguliers du R_n. Il est procédé à des déterminations métriques pour le parallélipipède, par Lipschitz (230), pour la pyramide du R_n, par Lasker

(214), pour le prismatoïde, par SCHOUTE (347), et, par SCHLEGEL (322) pour le prisme du R_4 en commentant cette recherche par un modèle de projection. POINCARÉ (293) étend un théorème d'Euler sur le polyèdre, aux polyèdres à n dimensions ; SCHOUTE (348, 346) étudie des corps du R_n admettant $n+2$ inversions et donne dans le R_4 les formes cristallines les plus générales du système régulier.

Nombreuses sont aussi les extensions de la *Géométrie élémentaire* aux espaces supérieurs. CASSANI (69) entreprend ces développements systématiquement d'abord pour le R_4, dont la Géométrie est en même temps interprétée comme Géométrie réglée du R_6, puis pour le R_n Veronese (423) de même, avec une base philosophique très complète; une critique de Péano a provoqué un intéressant échange d'opinions. DEL PEZZO (276) donne un tableau des postulats, définitions et théorèmes fondamentaux de la géométrie linéaire projective du R_n. CASSANI (72) traite la *métrique* du R_4 ; SEGRE (386) détermine sans calcul, les *propriétés descriptives* du R_4, par analogie à celle des espaces inférieurs et donne la démonstration d'un théorème de KLEIN (378) relatif aux conditions sous lesquelles un espace à n dimensions est linéaire. SCHLEGEL (335) fixe les différentes formes des *groupes ponctuels* du R_n, TONELLI (417), PEDDIE (266), BERTINI (dans le dernier chapitre du 69, 25) trouvent des théorèmes sur les intersections d'espaces et sur les espaces ayant une partie commune de dimensions multiples et d'ordres divers. BUSCHE (61) étend au R_n les *relations harmoniques*; KÜHNE (212) de même. Divers théorèmes sont donnés par HOPPE (178) et DE LA RIVE (311). HOPPE (173, 181), CASSANI (68, 73) et aussi CASTELNUOVO (74) s'occupent des *angles* des espaces linéaires; JORDAN (186) les étudie analytiquement et VERONESE (419) au moyen de la Géométrie pure. HOPPE (179) et SCHOUTE (342), VERONESE (422), SCHLEGEL (331) traitent respectivement de la *congruence et de la symétrie* dans le R_n, des *configurations*, et des systèmes de *coordonnées polaires*.

Dans le domaine des *groupes de transformation*, les recherches utilisant le R_n, se sont montrées fécondes en résultats; ce qui se rapporte aux corps réguliers a déjà été mentionné plus haut. Notons une étude analytique de COLE (91) sur les groupes de transformations ramenant une sphère à quatre dimensions à elle-même. KANTOR (191-193) étudie les transformations *quadratiques* du R_n; DEL PEZZO (278, 279) et FANO (128, 129) s'occupent des *transformations de Cremona*; FANO étudie (126, 127) les groupes de *transformations continus et projectifs* servant à déterminer certaines M_n algébriques et leurs relations entre elles; il généralise aussi (130) *les groupes de Jonquière*. J. BRILL (54) traite des *transformations ponctuelles* dans le R_n et ENGEL (114, 115) des *transformations infinitésimales*. Les groupes de *transformations* de LIE, en corrélation avec la théorie des formes spatiales ainsi que les groupes transformant un R_{n-1} d'un domaine limité, en un autre R_{n-1} du même domaine, sont étudiés par KILLING (201, 204). DEL REY (304) s'occupe des groupes de *transformations linéaires à involutions* du R_n; PAGE (261, 262) étudie divers groupes du R_4, en particulier certains groupes primitifs. LANDSBERG (212) enfin, utilise les groupes du R_3 pour définir comme élément d'espace, un groupe de *m* éléments, représenté par un système de $m(n-m)$ équations, généralisant ainsi, dans un domaine à *n* variables, la notion connue de PLÜCKER.

De même que pour les corps réguliers du R_4, on cherche aussi, par des *projections, représentations* et applications du principe de *correspondance*, à faciliter l'intelligence de diverses configurations à plusieurs dimensions et à établir leurs propriétés. DEL PEZZO (271) traite d'une façon générale le problème de la *projection* d'une M_2 et d'une M_r d'un espace sur un autre; DEL RE (305) cherche les projections successives des quadriques du R_n; BERTINI (28) considère des courbes planes comme projections de courbes spéciales du R_n, et VIVANTI (425) montre que des formules récurrentes de certaines fonctions arithmétiques, formules que l'on trouve dans la théorie des types finis (endliche Ordnungstypen) établie par G. Cantor, ont leur vraie origine dans une projection de certaines configurations du R_n sur un espace inférieur. SEGRE (383) représente sur le plan une M_2^r du R_n, ASCHIERI (10) l'espace réglé sur le R_4, AUTONNE (14 et 15) les points d'un plan sur une M_2 unicursale et située dans le R_n; LORIA (237) rapporte les droites d'un R_3 aux points d'un R_4. KÜHNE (210) donne pour le R_n des *représentations conformes* dans les espaces supérieurs, et PUCHTA (300) le fait pour un système de courbes orthogonales sur une sphère à quatre et à n dimensions. Pannelli (264) trouve une correspondance entre R_3 et R_4, qui conduit à la représentation de Klein d'un complexe linéaire sur l'espace ponctuel, Milesi (245) prouve d'une nouvelle manière, qu'une corrélation entre le R_m et le R_n, ne peut être continue et univoque en même temps; Castelnuovo (77) généralise des théorèmes de Clebsch de Sturm et de Rosanes sur des groupes ponctuels associés; Cesaro (90) donne des formules pour les *déformations* infiniment petites d'une surface du R_n; Puchta (299) étudie les déformations continues d'une M_n; Schur (363, 364) celles des corps à courbure de Riemann constante et celles d'une M_3 du R_4.

La *Géométrie projective*, dont les principes et raisonnements ont été, pour ainsi dire sans exception, généralisés de cette façon, est un domaine qui se prête spécialement aux recherches du R_n, et ces études sont presque toutes dues à un groupe de savants italiens; elles se rapportent aux *relations fondamentales* chez Aschieri (12) aux *postulats* chez Fano (123) et Amodeo (3, 4), au passage dans le R_4 de théorèmes de la *Géométrie des droites* chez Bertini (24) et Segre (366-368), à la *théorie des polaires* chez Brambilla (51) et Waelsch (432), à la *détermination de M supérieurs* au moyen de M résultant de projections chez Zindler (438), *à des relations collinéaires et d'involution* chez Loria (232, 238), Predella (295), del Re (304), à des *correspondances* chez Berzolari (31), de Paolis (265), Giudice (144), del Re (302, 303), Palatini (263), Amodeo (1, 2), Chizzoni (93), Pieti (281), Bordiga (44), Aschieri (8), à des *homographies* chez Enriques (116-118), Segre (369-372), Bertini (23, 26, 27), Predella (294), Aschieri (9, 11), Deruyts (105), à des *corrélations* chez Hirst (158) et Fontené (134), — à des *complexes et congruences* chez Bordiga (45, 48-50), Schumacher (362), Ricci (309), Castelnuovo (75, 82), Segre (386, 387). Ce dernier détermine sans calcul, les propriétés descriptives du R_4 et étend les premières propriétés focales des faisceaux et gerbes de droites du R_3, à ceux et celles du R_4.

On sait que des théorèmes de la Géométrie plane se démontrent souvent le plus facilement par des *sections* et *projections* de figures de l'espace; ce procédé appliqué aux espaces à plus de trois dimensions, conduit à de nouveaux résultats du domaine de la Géométrie élémentaire. C'est ainsi que Bordiga (40, 42, 46, 47), déduit du R_6 des propriétés de surfaces des 5^e, 6^e et 7^e ordres, et étend (43) ces considérations aux surfaces de degré $\frac{1}{2}$ m (m + 1) du R_{2m}; il donne aussi une représentation plane des surfaces réglées normales situées dans le R_n (41). Segre (370) trouve dans le principe de la projection des figures du R_4, la base organique de la théorie des surfaces du quatrième ordre avec conique double ou conique de rebroussement. Il étend ensuite des théorèmes relatifs aux surfaces réglées de genre 1, 2, 3, aux surfaces d'un genre supérieur quelconque, (377, 380) et donne aussi la solution de diverses questions nouvelles relatives à la Géométrie ordinaire. On généralise une formule numérique de Sturm sur les surfaces réglées d'ordre n, de genre p (384), et il en résulte le théorème de Clifford sur la relation existant entre une courbe de genre p et d'ordre $n > 2\ p - 2$ et un $R < (n\text{-}p)$ (385). Finalement l'examen des M_3 du R_4 fournit de nouvelles surfaces et systèmes focaux du R_3, ainsi que des propriétés nouvelles de configurations connues (388). Les recherches de Castelnuovo (76) sur la géométrie des courbes elliptiques, se rattachent aux études de Segre (380). Cosserat (98) utilise enfin le R_4 pour étudier celles des surfaces algébriques qui contiennent plusieurs séries de coniques.

L'analogue d'une courbe du plan et d'une surface de l'espace est une *hypersurface* (M_{n-1} dans R_n); ces figures sont l'objet de nombreuses recherches. Sylvester et Sharp (397) donnent des théorèmes sur leurs polaires; Ricci (307) généralise le problème des systèmes de surfaces orthogonaux; Puchta (298) étudie les surfaces développables les plus générales; Moore (548) étend au R_n les études de Picard sur les surfaces algébriques dont les sections planes sont toutes rationnelles. Del Pezzo (270) applique aux hypersurfaces des théorèmes de Veronese (419) sur les espaces tangents aux courbes du R_n; et développant plus tard ces travaux il est conduit aux surfaces normales de $p^{\text{ième}}$ espèce dans le R_n, aux hypersurfaces normales ($M <_2$) (273) et à celles des surfaces du n^e ordre du R_n qui appartiennent à aucun $R <_n$ (274). Segre (371, 374) entreprend la théorie des surfaces réglées. Del Pezzo (268, 277), Nicoli (257), Bertini (29), donnent des additions au travail de Segre (366), tandis que Berzolari (33) et Nanson (253) s'occupent spécialement des hypersurfaces du 2e ordre. Ascione (13) étend au R_4 et Segre (390) au R_n, des théorèmes sur la hessienne. Enriques (119) étudie les configurations à contacts d'ordre supérieurs des M_3^3 dans R_4; Segre (382) examine ceux des M_3^3 du R_4 qui admettent le plus grand nombre de points doubles. Hoppe (174, 182) applique au R_n des théorèmes de la *théorie de la courbure;* Ricci (308) généralise dans le même but les formules de la Géométrie infinitésimale, formules appliquées par Banal (17) à celles des M_3 du R_4 pour lesquelles l'analogie avec les M_2 du R_3 n'existe pas. De la même façon Cesaro (88, 89) développe les formules de Codazzi, tandis que Monro (247), Mlodzieionski (246), et Staeckel (408) développent la théorie de la flexion des surfaces. Del Pezzo (269) étend aux surfaces la représentation de Veronese d'une courbe du R_m, par la projection d'une courbe normale, dans le R_n (comparer avec 270); Schoute (348) et Hoppe (176) étendent à des espaces supérieurs : le premier les recherches de Casey et Darboux sur certaines courbes planes et surfaces de l'espace ordinaire, le second le théorème de Biermann sur les plans tangents à une surface. Hilbert (157) étudie les singularités d'une surface discriminante du R_n; Vahlen (418) définit enfin, pour R_n, la surface de Fresnel.

La théorie des courbes donne lieu à des développements analogues dans le domaine des *hypercourbes* (M_{n-2} dans R_n). Hoppe (177) fait le premier des recherches générales sur ces configurations; il étend à celles-ci les définitions de la tangente, de la normale principale, de la courbure et de la torsion (180). Cesaro (87) développe dans le même but le principe du calcul barycentrique en définissant les coordonnées barycentriques d'un point comme masses des sommets d'un corps régulier ayant $n + 1$ sommets, dans le R_n. Le même auteur donne plus tard une théorie des courbes des espaces supérieurs (91) et généralise en même temps les équations de l'élasticité. Castelnuovo (81) démontre par la Géométrie pure, au moyen du R_n, les théorèmes fondamentaux de la théorie des courbes algébriques, théorèmes démontrés par Clebsch au moyen des fonctions algébriques. Pirondini (291) étend aux courbes à triple courbure du R_4 la Géométrie infinitésimale ordinaire. Cassani (71) et de Ruyts (104) appliquent les théorèmes sur la cubique gauche aux courbes normales du $n^{\text{ième}}$ ordre dans le R_n; Aschieri (10) étudie les courbes normales rationnelles du R_4; Loria (235, 236) et Berzolari (30) font des recherches correspondantes pour le R_n, et Zecca (435) s'occupe spécialement dans le R_n, des courbes du $(m+1)^{\text{éme}}$ ordre avec points doubles. Les propriétés de certaines courbes sont aussi étendues aux hypercourbes. C'est ainsi que Fano (125) étudie la position de la courbe gauche d'un ordre donné et de genre maximum du R_n, Brunn (58) les courbes sans points d'inflexion, Lasker (215) celles du R_n coupées par un R_{n-1} en n points; Bertini considère les courbes planes comme projections de courbes spéciales du R_n. Del Pezzo (275) et Fine (133) s'occupent des singularités des hypercourbes et Landsberg (213) des courbures de courbes à une dimension contenues dans les espaces supérieurs.

La *Géométrie énumérative* fondée par Schubert ouvrit aux chercheurs un riche champ d'études; l'objet principal de cette géométrie considéré dans sa plus grande généralité, consiste à déterminer le nombre de configurations qui satisfont à un certain nombre de conditions. Schubert lui-même a résolu dans toute une suite de mémoires (351-361) des problèmes de cette espèce et d'une complication toujours plus grande; il traita, entre autre, à tour de rôle : les nombres invariants d'espaces linéaires, le problème des caractéristiques et des déterminations de nombres pour la M quadratique et pour la géométrie réglée. Ces travaux se relient à ceux de Piéri (282, 284-288), qui donne des déterminations numériques sur les coïncidences de droites et les couples de points ainsi que sur les intersections d'espaces à plusieurs dimensions; Segre (391) traite à un autre point de vue ces problèmes, ce qui le conduit à de nouvelles généralisations. Castelnuovo (78-80, 83) applique la méthode de Schubert dans le même sens que Piéri à des questions générales de la Géométrie énumérative, à des courbes algébriques et à des involutions rationnelles. En outre Cassani (70) et Amodeo (5) s'occupent de déterminations de nombres de systèmes linéaires; Visalli (424) traite des caractéristiques des systèmes de corrélation entre deux plans; Pincherle (290), Berzolari (32) et Burali Forti (60) étudient les hypersurfaces et les hypercourbes; le dernier applique au R_n la méthode d'Halphen pour la théorie des caractéristiques du R_3.

Enfin Study (412) donne des compléments sur des nombres de coniques et réussit, par une représentation dans le R_5 de l'ensemble des coniques planes, à éclaircir la différence existant entre les conceptions opposées de Halphen et de Chasles (415).

Dyck (110) fournit des généralisations de théorèmes de l'*Analysis situs* du M_n et Poincaré montre que, dans le sens de l'*Analysis situs*, une surface n'est déjà plus, dans le R_4, définie par les « indices de connexion » de Betti.

La *théorie des ensembles de points* est étendue au R_n, d'abord par son fondateur Cantor (67), puis par Loria (233). Maccaferi (239) fixe la condition d'un système ponctuel connectif à n dimensions et Schönflies (340) utilise, pour la représentation de cubes à diverses dimensions, le théorème de Cantor : un ensemble à n dimensions possède la même puissance qu'un ensemble à une dimension.

Les *formes d'espace non euclidiennes* à n dimensions furent d'abord étudiées en détail par Killing (199, 202, 203), au moyen d'une généralisation des coordonnées de Weierstrass ; on trouve aussi chez Lie (219_a) quelques remarques à ce sujet. Stouff (409) étend la formule de la surface du triangle sphérique à la surface sphérique de Riemann dans l'espace à n dimensions. Schlumberger (339) donne les traits fondamentaux de la géométrie sphérique linéaire à n dimensions ; Heyl (155) examine les propriétés de la sphere du R_n; enfin Brill (53) établit que certains espaces à courbure négative constante ne sont contenus dans aucun R_4, mais peuvent être tirés d'un R_5.

La *Mécanique* met aussi à profit cette extension de la géométrie. Buchheim (59) réussit à développer, au moyen des méthodes de Grassmann, la théorie des forces agissant sur un corps solide, dans diverses formes d'espace, à plusieurs dimensions, la théorie des biquaternions étant ici en défaut. Killing (200) établit pour des points assujettis à demeurer sur une sphère à n dimensions du R_{n+1}, les bases de la mécanique, des espaces non euclidiens ; Cole (97) étudie les rotations dans le R et Canizzo (62) dans le R_5.

Le besoin de représenter des *fonctions analytiques* par des figures géométriques, a aussi conduit à utiliser les espaces à plusieurs dimensions ; ainsi Bettazzi (34) étudie les expressions analytiques qui représentent, en chaque point du M_n, une fonction à n variables réelles, finie et continue dans M_n. Volterra (426-430) étend au R_n, la théorie de Riemann des variables complexes ; il étudie dans les hyperespaces les fonctions conjuguées et établit l'intégration complète d'un système d'équations différentielles partielles, à l'intérieur d'un espace sphérique. C'est dans ce même domaine que se classent les études de Fabri (121-122), sur les fonctions dans les hyperespaces.

Les mémoires sur des nombres complexes d'ordre supérieur se placent aussi dans la liste des recherches à n dimensions ; car ces quantités, quoique étant, au premier abord, d'une nature purement analytique, forment cependant, comme Grassmann le montra le premier, la base la plus simple des études de la géométrie à plusieurs dimensions. Mentionnons encore parmi les travaux récents, la démonstration de Weierstrass (433), établissant la possibilité d'une arithmétique des nombres complexes avec un nombre quelconque d'unités principales, et la conception due à Dedekind (103), des grandeurs hypercomplexes comme nombres ordinaires plurivalents. A ce dernier travail, se rattachent les études analytiques de Petersen (267), Berloty (22) et Weyer (434), sur la théorie de ces nombres. Par contre la représentation géométrique en fut donnée par Schur (365) qui considère les composantes d'un nombre complexe à n membres, comme coordonnées d'un point du R_n ; il donne pour établir la liaison entre ces nombres l'interprétation géométrique et rattache leurs relations fonctionnelles à la théorie des transformations de Lie, étude continuée par Study (413-414) et Schaeffers (320).

Schendel (322) donne des applications des méthodes de Grassmann, à la géométrie à plusieurs dimensions ; enfin Simony (403) étudie les opérations fondamentales des nombres supérieurs complexes. L'étude de ces nombres et de leurs opérations a éclairci notablement la manière de les envisager et simplifié les calculs. On reconnut que des symboles incommodes et des calculs symboliques peuvent être remplacés de la façon la plus avantageuse par l'introduction de ces nombres et des opérations les concernant ; tous ces essais ont abouti enfin aux unités et opérations de l'Ausdehnungslehre. Les tentatives d'extension de la théorie des quaternions à un plus grand nombre d'unités ont eu le même résultat ; l'exemple de Chapman qui, à cet effet, utilisa un nouveau symbole sans remarquer que celui-ci avait la même action que la « multiplication extérieure » de Grassmann, le montre du reste ; dernièrement encore Shaw (399), quoique travaillant dans un autre but, fit une erreur tout analogue.

Pour terminer rappelons encore la question suivante bien souvent discutée : Quelles sont, parmi les nombreuses formes d'espace *abstraites* des mathématiques celles qui possèdent leur image *concrète* dans notre univers, (domaine de l'expérience). Il est indiscutable aujourd'hui que notre univers n'est pas pourvu de plus de trois dimensions et que tous les essais tendant à lui en ajouter une quatrième sont à rejeter. Il existe par contre une question encore non résolue, celle de savoir si cet espace est sans courbure plan ; ou si, d'après une hypothèse émise par Zöllner (439), il possède une courbure positive, fût elle même inappréciable. Rien ne fait présumer non plus que notre univers se trouve dans un espace à quatre dimensions *existant réellement* comme un plan dans un espace à trois dimensions. Il est vrai que Bresch (52) a formulé une hypothèse analogue pour expliquer certains faits chimiques. D'après Most (249) aucun fait physique ne nécessite une telle hypothèse. Simony (402) y opposa des considérations sur la matière.

On connaît une série de phénomènes cinématiques qui sont impossibles dans un espace à trois dimensions et qui, par contre, sont exécutables dans l'espace à quatre dimensions. C'est ainsi que Newcomb (252) montra qu'au moyen d'un passage par l'espace à quatre dimensions, une surface matérielle fermée pouvait, par flexion, être transformée de telle façon que le côté intérieur devienne côté extérieur et vice versa, Hoppe (171-172) et Durège (109) qu'une certaine courbe gauche fermée et pourvue d'un lacet pouvait en être privée par un passage au travers de l'espace à quatre dimensions, passage durant lequel la courbe reste fermée.

Si on considère pour clore cet aperçu, tout le développement actuel de la Géométrie à n dimensions, développement qui est encore loin d'être terminé, on doit reconnaître que l'apparition de cette branche des mathématiques marque une ère nouvelle dans l'histoire de la Géométrie ; de nouvelles voies sont ainsi ouvertes aux chercheurs dans des domaines inexplorés, et la Géométrie, même en restant dans son ancien domaine intuitif, est fructifiée et enrichie à bien des égards.

Dr Victor SCHLEGEL (Hagen, Prusse).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE [1]

AMODEO. — 1. Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche di ordine n normali di uno S_{n-1}. *Annali di mat.* (2), 19, 1891.

2. Corrispondenze univoche singolari delle curve ellittiche, armoniche ed equianarmoniche. *Annali di mat.* (2), 19, 1891.

3. Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria projettiva di uno S_r. *Torino Atti*, 26, 1891.

4. Sulla linearità delle varietà ad un numero qualunque di dimensioni. *Riv. di Mat.* 2, 1892.

5. Un' osservazione sulle condizioni lineari della geometria. *Annali del. R. Ist. Tecn. e Naut. di Napoli*, 1892.

ANDRADE. — 6. Sur un point de doctrine relatif à la théorie des intégrales multiples. *C. R.*, 119, 1894.

ARNOUX. — 7. Essais de psychologie et de métaphysique positives. Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques. Paris, 1894.

ASCHIERI. — 8. Sulla trasformazione omographica generale di uno spazio lineare di specie qualunque. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 18, 1885.

9. Delle corrispondenze lineari reciproche in uno spazio lineare di spezie qualunque. *Lomb. Rend.* (2), 19, 1886.

10. Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni. *Rom. Acc. L. Mem.* (4), 4, 1887.

11. Sulle omografie binarie e ternarie. — Sulle omografie binarie e i loro prodotti. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 24, 1891.

12. Fondamenti di geometria analitica. *Modena Mem.* (2), 11, 1895.

ASCIONE. — 13. Sulla Hessiana di una varietà nello spazio a 4 dimensioni. *Batt. G.*, 31, 1893.

AUTONNE. — 14. Sur les variétés unicursales à deux dimensions. *C. R.*, 121, 1895.

15. Sur les variétés unicursales à trois dimensions *C. R.*, 121, 1895.

BALL. — 16. A hypothesis relating to the nature of the ether and gravity. *Mess.* (2), 21, 1891.

BANAL. — 17. Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali. *Annali di Mat.* (2), 24, 1896.

BECKER. — 18. Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume. *Schlömilch Z.*, 17, 1872.

[1] Les titres des journaux sont abrégés en accord avec le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Berlin.

Beez. — 19. Ueber das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. *Math. Ann.*, 7, 1874; *Schlömilch Z.*, 20, 1875; 21, 1876; 24, 1879.

Beltrami. — 20. Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. *Batt. G.*, 6, 1868.

21. Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante. *Brioschi Ann.* (2), 2, 1868.

Berloty. — 22. Thèse d'analyse. Théorie des quantités complexes à *n* unités principales. Paris, 1886.

Bertini. — 23. Le omografie involutorie in uno spazio lineare a quasivoglia numero di dimensioni. *Lomb. Rend.* (2), 19, 1886.

24. Sui fasci di quadriche in uno spazio ad *n* dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (4). 2. 1886.

25. Sulla geometria degli spazi lineari in uno spazio ad *n* dimensioni. *Lomb. Ist. Rend.* (2). 19. 1886.

26. Costruzione delle omographie di uno spazio lineare qualunque. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 20, 1887.

27. Sulle scomposizione di certe omografie in omologie. *Torino Atti*, 22, 1887.

28. Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica. *Torino Atti*, 26, 1890.

29. Sugli spazi lineari delle quadriche a numero pari di dimensioni. *Torino Atti*, 30, 1895.

Berzolari. — 30. Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Annali di Mat.* (2), 21, 1893.

31. Sulle corrispondenze algebriche fra *r* punti di uno spazio lineare di quante si vogl'ano dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (5), 4, 1895.

32. Sulle secanti multiple di una curva algebrica dello spazio a tre od a quattro dimensioni. *Palermo Rend.*, 9, 1895.

33. Sulle equazioni differenziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (5), 5, 1896.

Bettazzi. — 34. Sulla rappresentazione analitica delle funz'oni di più variabili reali. *Pisa Ann.*, 5, 1888.

Betti. — 35. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. *Brioschi Ann.* (2), 4, 1871.

Bianchi. — 36. Ueber die Normalformen $3^{ter}u$ 5^{ter}. Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung. *Math. Ann.*, 17.

Biermann. — 37. Ueber die regelmässigen Körper höherer Dimension. *Wien. Ber.*, 90, 1884.

38. Ueber die regelmässigen Punktgruppen in Raumen höherer Dimension und die zugehörigen linearen Substitutionen mehrerer Variablen. *Wien. Ber.*, 95, 1887.

Bolyai. — 39. Tentamen juventutem stud. in elementa math... introducendi. *Maros Vasarhelyini* 1831. I Appendix.

Bordiga. — 40. Di alcune superficie del 5° e del 6° ordine che si deducono dello spazio a sei dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (6), 4, 1886.

41. Rappresentazione piana della superficie rigata normale. *Ven. Ist. Atti* (6), 4, 1886.

42. La surface du sixième ordre avec six droites. *C. R.*, 102, 1886.

43. Nouveaux groupes de surfaces à deux dimensions dans les espaces à *n* dimensions. *C. R.*, 102, 1886.

44. Corrispondenza di polarità negli spazi superiori. *Ven. Ist. Atti* (6), 3, 1886.

45. Complessi e sistemi lineari di raggi negli spazi superiori. Curve normali che essi generano. *Ven. Ist. Atti* (6), 4, 1886.

46. La superficie del 6° ordine con 10 rette nello spazio R_4 e le sue projezioni nello spazio ordinario. *Rom. Acc. L. Mem.* (4), 3, 1887.

47. Di una certa superficie del 7° ordine. *Ven. Ist. Atti* (6), 5, 1888.

48. Dei complessi in generale nello spazio a quattro dimensioni ed in particolare di alcuni di primo ordine. *Ven. Ist. Atti* (6), 6, 1888.

49. Di una certa congruenza del terzo ordine e della sesta classe dello spazio ordinario. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 6, 1890.

50. Congruenza del 4° ordine e della 2ª classe nello spazio a quattro dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (7), 5, 1894.

Brambilla. — 51. Un teorema nella teoria delle polari. Torino Atti, 22, 1887.

Bresch. — 52. Der Chemismus im Lichte mehr dimensionaler Raumanschauung. Leipzig, 1882.

Brill A. — 53. Bemerkungen ueber pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von rei Dimensionen. *Math. Ann.*, 26, 1885.

Brill J. — 54. On certain general properties of point transformations. *Quart. J.*, 27, 1895.

Brückner. — 55. Die Elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Polytope. *Jahresber. d. Ver. f. Naturk.* Zwickau, 1893.

Brunel. — 56. Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à *n* dimensions. *Math. Ann.*, 19, 1881.

57. Sur l'analyse indéterminée et la géométrie à *n* dimensions. 1888.

Brunn. — 58. Ueber Curven ohne Wendepunkte. München. 1889.

Buchheim. — 59. On the theory of screws in elliptic space. *Lond. M. S. Proc.*, 15, 1884 ; 16, 1885 ; 17, 1886 ; 18. 1887.

Burali-Forti. — 60. Sopra il sistema di quadriche che hanno l'n-pla polare comune. *Palermo Rend.*, 4, 1890.

Busche. — 61. Ueber das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden. *Math Ann.*, 41, 1893.

Cannizzo. — 62. Varietà di rotazione nello spazio a cinque dimensioni. Roma. Tipografia Sallustiana, 1896.

Cantor. — 63. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Crelles Journ.*, 84, 1877.

64. — Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. *Gött. N.*, 1879.

65. — Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 20, 1882.

66. Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à *n* dimensions. *Acta Math.*, 2, 1883.

67. Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume. *Acta Math.*, 7, 1885.

Cassani. — 68. Sugli angoli degli spazi lineari. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 1, 1885.

69. Geometria pura euclidea degli spazi superiori. *Ven. Ist. Atti* (9), 1, 2. 1885, 1887. — *Batt. G.* 23. 1885.

70. Ricerche geometriche negli spazi superiori. *Ven. Ist. Atti* (6), 4, 1886.
71. Un teorema generale sulle linee normali degli spazi dispari. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 2, 1886.
72. Sulla geometria pura Euclidiana ad *n* dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (7), 5, 1894.
73. Sugli angoli degli spazi lineari in un ambiente a più dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (7), 6, 1895.
CASTELNUOVO. — 74. Angoli di due spazi contenuti nello spazio a *n* dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (6), 3, 1885.
75. Sopra una congruenza del 3° ordine e 6ª classe dello spazio ordinario e sulle sue projezioni nello spazio ordinario. *Ven. Ist. Atti* (6), 5, 1888. — Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a quattro dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (6), 6, 1888.
76. Geometria sulle curve ellittiche. *Torino Atti*, 24, 1888.
77. Su certi gruppi associati di punti. *Palermo Rend.*, 3, 1889.
78. Una applicazione della Geometria enumerativa alle curve algebriche. *Palermo Rend.*, 3, 1889.
79. Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio ad *n* dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 5, 1889.
80. Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 5, 1889.
81. Ricerche di geometria sulle curve algebriche. *Torino Atti*, 24, 1889.
82. Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (7), 2. 1891.
83. Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica. *Palermo Rend.*, 7, 1893.
CAUCHY, — 84. *C. R.*, 24, 1847.
CAYLEY. — 85. A memoir on abstract geometry. *Lond. Phil. Trans.*, 160, 1870.
CESARO. — 86. Alcune misure negli iperspazii. *Batt. G.*, 24, 1886.
87. Sur l'analyse barycentrique des courbes. *Annali di Mat.* (2), 15, 1889.
88. Sulla geometria intrinseca degli spazi curvi. *Atti dell' Acc. di Napoli* (2), 6, 1894.
89. Le formole di Codazzi negli iperspazii. *Napoli Rend.* (2), 8, 1894.
90. Le deformazioni infinitesime degli iperspazi *Napoli Rend.* (3), 1, 1895.
91. Lezioni di geometria intrinseca. *Napoli*, 1896.
CHAPMAN. — 92. On some applications of the units of an *n*-fold space. *American J.*, 10, 1888.
CHIZZONI. — 93. Sulle corrispondenza univoca fra le rette di uno spazio ordinario ed i punti di uno spazio lineare a quattro dimensioni. *Atti dell' Acc. Gioenia di Sc. nat.* in Catania (3), 20, 1888.
CHRISTOFFEL. — 94, Ueber die Transformation der homogenen Differential ausdrücke zweiten Grades. *Crelle's Journ.*, 70, 1869.
CLIFFORD. — 95. Mathematical papers. London, 1882, p. 605.
96. Classification of loci. *Phil. Trans.*, 169.
COLE. — 97. On rotations in space of four dimensions. *Americ. J.*, 12, 1890.

COSSERAT (E.). — 98. Sur l'emploi de l'espace à quatre dimensions dans l'étude des surfaces algébriques admettant plusieurs séries de coniques. *C. R.*, 124, 1897.

CRAIG. — 99. Note on the projection of the general locus of space of four dimensions into space of three dimensions. *Americ J.*, 2, 1879.

100. On certain metrical properties of surfaces. *Americ. J.*, 4, 1882.

DARBOUX. — 101. *Math. Ann.*, 5, 1872, p. 256.

102. Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, *Bord. Mém.*, 9, 1873.

DEDEKIND. — 103. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. *Gött. Nachr.*, 1885.

DERUYTS. — 104. Sur une propriété commune aux courbes normales des espaces linéaires. *Belg. Bull.* (3), 17, 1889.

105. Sur la correspondance homographique entre les éléments de deux espaces linéaires quelconques. *Belg. Mém.*, 23, 1892.

DICKSTEIN. — 106. Bericht über die Arbeiten ausdem Gebiete der polydimensionalen Geometrie. *Prace mat. fiz.*, 1, 1888.

DÜHRING. — 107. Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Berlin, 1873.

DURÈGE. — 108. Ueber Körper von vier Dimensionen. *Wien. Ber.*, 83, 1881.

109. Ueber die Hoppe'sche Knotenkurve. *Wien. Ber.*, 1880.

DYCK. — 110. Beiträge zur Analysis situs. II. *Math. Ann.*, 37, 1890.

EBERHARD. — 111. Ein Satz aus der Topologie, *Math. Ann.*, 36, 1890.

EICHLER. — 112. Verallgemeinernde Betrachtungen über unsere Raumauffassung und ihre Verwendung für die analytische Geometrie. *Progr. Lingen*, 1874.

EMSMANN. — 113. Zum vieraxigen Coordinatensystem. *Hoffmann Z.*, 11, 1880.

ENGEL. — 114. Zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen. *Leipzig Ber.*, 1886.

115. Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. *Leipz. Ber.*, 1887.

ENRIQUÈS. — 116. Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi lineari ad *n* dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 6, 1890.

117. Le omografie cicliche negli spazii ad n dimensioni. *Batt. G.*, 30, 1892.

118. Le omografie armoniche negli spazii lineari ad *n* dimensioni. *Batt. G.*, 30, 1892.

119. Sugli spazi pluritangenti delle varietà cubiche generali appartenenti allo spazio a quattro dimensioni. *Batt. G.*, 31, 1893.

120. Die Axiome der Geometrie. Leipzig, 1877. — Cf. Schlegel. Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke. Leipzig, 1878, p. 20.

FABRI. — 121. Sopra le funzioni di iperspazii. *Ven. Is. Atti* (7), 4, 1893.

122. Sopra alcune proprietà generali delle funzioni che dipendono da altre funzioni e da linee. *Torino Atti*, 25, 1890.

FANO. — 123. Sui postulati fondamentali della geometria projettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni. *Batt. G.*, 30, 1892.

124. Stud iodi alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni. *Annali di Mat.* (2), 21, 1893.

125. Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque. *Torino Mem.* (2), 44, 1894.
126. Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo integrabile di trasformazioni projettive in sè. *Ven. Ist. Atti* (7), 7, 1896.
127. Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè. *Palermo Rend.*, 10, 1896.
128. Sui gruppi continui di trasformazioni Cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni projettive. *Palermo Rend.* 10, 1896.
129. I gruppi continui primitivi di trasformazioni Cremoniane dello spazio. *Acc. Real. delle Sc. di Torino*, 1898.
130. I gruppi di Jonquières generalizati. *Acc. Real. delle Sc. di Torino*, 1898.
FARJON. — 131. Note de Géométrie. *Nouv. Ann.* (3), 14, 1895.
FIEDLER. — 132. Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden. *Vierteljahrschr. d. naturf. Ges. in Zürich*, 27, 1882, Anhang.
FINE. — 133. A theorem respecting the singularities of curves of multiple curvature. *American J.*, 9, 1887.
FONTENÉ. — 134. L'hyperspace à (n-1) dimensions. Propriétés métriques de la corrélation générale. Paris, 1892.
FORCHHAMMER. — 135. Pröver paa geometrie med fire dimensioner. *Zeuthen T.* (4), 5, 1881.
FRAHM. — 136. Habilitationsschrift. Tübingen, 1873.
FRATTINI. — 137. I gruppi a k dimensioni. *Rom. Acc. L.* (3), 8, 1884.
GALDEANO. — 138. Nota acerca de los poliedros de cuatro dimensiones. *Progreso mat.*, 2, 1892.
139. Las modernas generalizaciones expresadas por el algebra simbolica, las geometrias no-euclideas y el concepto de hiper-espazio. Madrid, 1896.
GAUSS. — 140. *Briefwechsel* mit Schumacher. 2, 269, 431; 5, 47.
GEISER. — 141. Sopra una quistione geometrica di massimo e sua estenzione ad uno spazio di n dimensione (1868).
GENOCCHI. — 142. Lettre à M. Quetelet sur diverses questions mathématiques. *Bull. de Belg.* (2), 36, 1873.
GILLES. — 143. Die Grundlagen der Mathematik. *Bayr. Bl.*, 18.
GIUDICE. — 144. Sulla corrispondenza fra due iperspazii. *Batt. G.*, 29, 1891.
GOURSAT. — 145. Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace. *Ann. de l'Éc. Norm.* (3), 6, 1889.
GRASSMANN. — 146. Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig, 1844. — Die Ausdehnungslehre von 1844. Leipzig, 1878. — Gesammelte math. u. phys. Werke 1., 1. Leipzig, 1894.
HAFT. — 147. La quarta dimension. *Soc. Argentinea.* 30, 1890.
HALL. — 148. The projection of fourfold figures upon a three-flat. *American J.*, 15, 1893.
HALPHÉN. — 149. Recherches de géométrie à n dimensions. *Bull. S. M. F.*, 2, 1875.
HALSTED. — 150. Bibliography of hyperspace and non-euclidian geometry. *Americ. J.*, 1, 2, 1878, 1879.
HARMUTH. — 151. Ueber polydimensionale Zahlenfiguren. *Hoppe Arch.*, 69, 1882.

HELMHOLTZ. — 152. Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Gött. N.* 14, 1868.

HESS. — 153. Ueber die regulären Polytope höherer Art. *Marburg. Ber.*, 1885.

154. Ueber regelmässige Eintheilungen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. *Marburg. Naturf. Ges. Ber.*, 1895.

HEYL. — 155. Properties of the locus $r =$ constant in space of n dimensions. *Publ. University of Pennsylvania*, 1897.

156. [Modèles des solides réguliers à quatre dimensions.] Philadelphia, 1897.

HILBERT. — 157. Ueber Singularitäten der Discriminantenfläche. *Math. Ann.*, 30, 1887.

HIRST. — 158. On the correlation of two spaces, each of three dimensions. *Lond. M. S., Proc.* 21, 1890.

HOPPE. — 159. Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen. *Hoppe Arch.* 64, 1879.

160. Ueber dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen. *Hoppe Arch.*, 65, 1880.

161. Ueber den Winkel von n Dimensionen. *Hoppe Arch.*, 66, 1881.

162. Berechnung einiger vierdehniger Winkel. *Hoppe Arch.*, 67, 1882.

163. Innere Winkel aller regelmässigen linear begrenzten Figuren von vier Dimensionen. *Hoppe Arch.*, 68, 1882.

164. Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionen-Geometrie. *Hoppe Arch.*, 68, 1882.

165. Drei Sätze für Inhaltsberechnung in der Mehrdimensionen-Geometrie. *Hoppe Arch.*, 69, 1883.

166. Partielles Maximum eines Elementar-Tetratops. *Hoppe Arch.*, 69, 1883.

167. Numerische Berechnung der Winkel von vier Dimensionen. *Hoppe Arch.* 69, 1883.

168. Relation zwischen fünf Elementar-Tetratopen mit vier unabhängigen Grössen. *Hoppe Arch.*, 69, 1883.

169. Tetratop auf beliebiger Basis. *Hoppe Arch.*, 69, 1883.

170. Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen. *Hoppe Arch.*, 67, 1882.

171. Gleichung der Curve eines Bandes mit unauflösbarem Knoten, nebst Auflösung in vierter Dimension. *Hoppe Arch.*, 64, 1879.

172. Bemerkung, betr. die Auflösung eines Knotens in vierter Dimension. *Hoppe Arch.*, 65, 1880.

173. Regelmässig linear begrenzter Winkel von vier Dimensionen. *Hoppe Arch.* (2), 3, 1885.

174. Erweiterung einiger Sätze der Flächentheorie auf n Dimensionen. *Hoppe Arch.* (2), 3, 1886.

175. Das n-dehnige $(n+1)$ — Eck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen. *Hoppe Arch.* (2), 5, 1887.

176. Erweiterung zweier Sätze auf n Dimensionen. *Hoppe Arch.* (2) 6, 1887.

177. Principien der n-dimensionalen Curventheorie. *Hoppe Arch.* (2), 6, 1888.

178. Erweiterung der Sätze über das Tetraeder, dessen Höhen sich in

einem Punkte schneiden, auf mehr Dimensionen. *Hoppe Arch.* (2), 9, 1890.

179. Ueber Congruenz und Symmetrie der Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. *Hoppe Arch.* (2), 9, 1890.

180. Fundamentalaxen der mehrfach gekrümmten Linien. *Hoppe Arch.* (2), 11, 1892.

181. Bedingung, unter der vier von einem Punkt aus gesehene Punkte in einem Raume liegen. *Hoppe Arch.* (2), 13, 1894.

182. Oskulirende Kugel nebst den analogen Gebilden für n Dimensionen. *Hoppe Arch.* (2), 12, 1894.

G. D. H. — 183. Anmaerkninger rörande kroppan af högre Dimensioner. *Zeuthen Fidskr.* (5), 6, 1888.

Jenrich. — 184. Beiträge zur Methodik des math. Unterrichts. *Progr.* Magdeburg, 1882.

Joly. — 185. The associative algebra applicable to hyperspace. *Proc. Irish Acad.* (3), 5, 1898.

Jordan. — 186. Essai sur la géométrie à n dimensions. *C. R.*, 75, 1872; *Bull. S. M. F.*, 3, 1875.

187. Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions. *C. R.*, 79, 1874.

188. Généralisation du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces. *C. R.*, 79, 1874.

Kantor. — 189. Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à r dimensions. *Bull. S. M. F.*, 8, 1880.

190. Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume. *Wien. Ber.*, 1879, p. 227.

191. Sopra le caratteristiche delle trasformazioni quadratiche nello spazio a r dimensioni. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 27, 1894.

192. Sopra le trasformazioni quadratiche periodiche nello spazio a r dimensioni. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 27, 1894; 28, 1895.

193. Theorie der Transformationen im R_r, welche sich aus quadratischen zusammensetzen lassen. *American J.*, 18, 1896.

Killink, — 194. Ueber zwei Raumformen mit constanter Krümmung. *Crelle's J.*, 86, 1878.

195. — Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie. *Progr.*, Brilon. 1880.

196. Die Rechnung in den nichteuklidischen Raumformen, *Crelle's J.*, 89. 1880.

197. Ueber die nichteuklidischen Raumformen von n Dimensionen. Braunsberg, 1883.

198. Erweiterung des Raumbegriffes, *Prog.*, Braunsberg, 1884.

199. Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig, 1885.

200. Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen. *Crelle's J.*, 98, 1885.

201. Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen. *Prog.*, Braunsberg, 1886.

202. Ueber die Grundlagen der Geometrie. *Crelle's J.*, 109, 1892.

203. Einführung in die Grundlagen der Geometrie I. Paderborn, 1893.

204. Zur projectiven Geometrie. *Math. Ann.*, 43, 1893.

205. KLEIN. Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. *Math. Ann.*, 5, 1872.

206. Ueber einen liniengeometrischen Satz. *Gött. N.*, 1872 ; *Math. Ann.*, 22.

207. Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen. *Katalog d. math. Ausstellung*, München, 1892.

KRETKOWSKI. — 208. (Auflösung einer Aufgabe aus der polydimensionalen Geometrie). Paris, Denkschr, 1881.

KRONECKER. — 209. Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variablen. *Berl. Monatsber*, 1869.

KUEHNE. — 210. Beiträge zur Lehre von der n-fachen Mannigfaltigkeit. *Dissert*, Berlin, 1892 ; *Hoppe Arch.* (2), 11, 1892.

LAISANT. — 211. Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques. *S. M. F. Bull.*, 22 (1894).

LANDSBERG (O.). — 212. Untersuchungen über die Gruppein einer linearen fünffachen Mannigfaltigkeit. *Dissert.*, Breslau, 1889.

LANDSBERG (G.). — 213. Zur Theorie der Krümmungen eindimensionaler, in höheren Mannigfaltigkeiten enthaltener Gebilde. *Crelle's J.*, 114, 1895.

LASKER (E.). — 214. Metrical relations of plane spaces of n dimensions. *Nature*, 52, 1895.

215. About a certain class of curved lines in space of n manifoldness. *Nature*, 52, 1895.

LEIBNIZ. — 216. Lettre à Huygens. 1679. Cf. Hankel. Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig, 1867.

LIE. — 217. Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungstheorie des gewöhnlichen Raumes entspricht. *Gott. N.*, 1871.

218. Zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen. *Gött. N.*, 1871.

219. Neue Integrationsmethode partieller Gleichungen erster Ordnung zwischen n Variablen. *Forh. af. Christ*, 1872 ; *Gött. Nachr.*, 1872.

219[a]. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche endliche Gruppe gestatten. *Math. Ann.*, 25, 1885.

LIERS. — 220. Ueber den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders. *Hoppe Arch.* (2), 12, 1894.

LIPSCHITZ. — 221. Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Variablen. *Crelle's J.*, 70, 1869 ; 72, 1870.

222. Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen. *Crelle's J.*, 71, 1870.

223. Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung. *Crelle's J.*, 74, 1872.

224. Extension of the planet-problem to a space of n dimensions and of constant integral curvature. *Quart. J.*, 12, 1873.

225. Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen. *Berl. Monatsber.*, 1872 ; *Crelle's J.*, 78, 1874.

226. Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface. *C. R.*, 82 ; *Crelle's J.*, 81, 1876.

227. Beitrag zur Theorie der Krümmung. *Crelle's J.*, 81, 1876.

228. Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges. *Crelle's J.*, 82, 1877.

229. Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften. *Berl. Ber.*, 1882.

230. Sur la théorie des diversités. *C. R.*, 102, 1886.

Lobatschewsky. — 231. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin, 1840.

Loria. — 232. Su una generalizzazione delle proprietà involutorie del quadrangulo e del quadrilatero completi. *Lomb. Rend.* (2), 18, 1885.

233. Le definizioni di spazio a n dimensioni, etc. *Batt. G.*, 25, 1887.

234. Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque. *Batt. G.*, 26, 1888.

235. Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a $(n-1)$ dimensioni. *Palermo Rend.*, 2, 1888.

236. Sulle curve razionali normali in uno spazio a n dimensioni. *Batt. G.*, 26, 1888.

237. Di due rappresentazioni univoche dello spazio rigato su una forma lineare di quarta specie. *Batt. G.*, 27, 1889.

238. Sugli enti geometrici generali da forme fondamentali in corrispondenza algebrica. *Batt. G.*, 34, 1896.

Maccaferri. — 239. Sugli insiemi continui e sugli insiemi connessi. *Rivista di Mat.*, 4, 1894.

Mansion. — 240. Sur la portée philosophique de la métagéométrie. *Brux. S. sc.*, 17 A, 1893.

Maschke. — 241. The representation of finite groups especially of the Rotation groups of the regular bodies of three and fourdimensional space by Cayley's color-diagrams. *American J.*, 18, 1895.

Mehmke. — 242. Ausdehnung einiger elementarer Sätze über das ebene Dreieck auf Räume von beliebig viel Dimensionen. *Hoppe Arch.*, 70, 1883.

Meyer (F.). — 243. Apolarität und rationale Curven. Tübingen, 1883.

244. Ein neues Theorem a. d. projectivischen Geometrie von n Dimensionen. *Württembg. Correspondenzbl.*, 1884.

Milesi. — 245. Sulla impossibile coesistenza della univocità e della continuità nella corrispondenza che si puo stabilire fra due spazi continui ad un numero differente di dimensioni. *Rivista di Mat.*, 2, 1892.

Mlodzieiowski. — 246. Ueber mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten. *Mosk. Nachr. Phys. Math. Abth.*, B, 8, 1889.

Monro. — 247. On flexure of spaces. *Lond. M. S. Proc.*, 9, 1878.

Moore. — 248. Algebraic surfaces of which every plane section is unicursal in the light of n-dimensional geometry. *American J.*, 10, 1887.

Most. — 249. Neue Darlegung der absoluten Geometrie und Mechanik, mit Berücksichtigung der Frage nach den Grenzen der Weltraumer. *Progr.*, Coblenz, 1883.

Mueller. — 250. Die vierte Raumdimension. *Hoffmann Z.*, 12, 1881, p. 40.

Mueller (R.). — 251. Ueber eine gewisse Gleichung $2\,n^{\text{ten}}$ Grades. *Dissert.*, Berlin, 1884.

Nagy. — 252. Sulla recente questione intorno alle dimensioni dello spazio. *Rivist. Ital. di Filosofia*, 1, 1890.

Nanson. — 253. The content of the common self-conjugate n-gon of two n-ary quadrics. *Messenger* (2), 26, 1896.

NETTO. — 254. Beitrag zur Mannigfsltigkeitalehre. *Crelles Journ.*, 86, 1878.

NEWCOMB. — 255. Note on a class of transformations which surfaces may undergo in space of more than three dimensions. *American J.*, 1, 1878.

NICOLI. — 256. Interpretazione geometrica del campo delle soluzioni di una equazione lineare a quattro variabili. *Modena Mem* (2), 7, 1890.

257. Interpretazione geometrica del campo delle soluzioni reali di una equazione quadratica a quattro variabili. *Modena Mem.* (2), 8, 1892.

258. Intorno agli spazi lineari a tre dimensioni considerati nel nostro spazio. *Modena Mem.* (2), 10, 11. 1895.

VAN OSS. — 259. Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen. *Dissert.* Giessen, 1894.

D'OVIDIO. — 260. Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante. *Acc. R. d. L.* (3), 1 ; *Math. Ann.*, 12, 1877.

PAGE. — 261. Transformation groups in space of four dimensions. *Annals of Math.*, 9, 1894.

262. On the primitive groups of transformations in space of four dimensions. *American J.*, 10, 1888.

PALATINI. — 263. Sopra una trasformazione delle figure del piano in figure dello spazio a quattro dimensioni fondata sopra una corrispondenza univoca dei punti reali ed immaginari di R_2 coi punti reali di R_4. Palmi. Fip. G. Lopresti, 1891.

PANNELLI. — 264. Sulla più semplice trasformazione birazionale dello spazio ordinario rigato in uno spazio lineare a quattro dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 6, 1890.

DE PAOLIS. — 265. Sulle corrispondenze continue che si possono stabilire tra i punti di r gruppi. *Annali di Mat.* (2), 18, 1890.

PEDDIE. — 266. The theory of contours and its applications in physical science. *Edinb. M. S. Proc.*, 4, 1886.

PETERSEN. — 267. Ueber n-dimensionale complexe Zahlen. *Gött. Nachr.*, 1877.

DEL PEZZO. — 268. Sulle quadriche ad $(n-1)$ dimensioni polari reciproche di sè stesse rispetto ad un altra. *Nap. Rend.*, 24, 1885.

269. Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di $n+1$ dimensioni. *Nap. Rend.*, 24, 1885.

270. Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni. *Nap. Rend.*, 25, 1886.

271. Sulle projezioni di una superficie e di una varietà dello spazio ad n dimensioni. *Nap. Rend.*, 25, 1886.

272. Intorno ad una proprietà fondamentale delle superficie e delle varietà immerse negli spazi a più dimensioni. *Napoli Rend.* (2), 1, 1887.

273. Sulle superficie e le varietà a più dimensioni le cui sezioni sono curve normali del genere p. *Annali di Mat.* (2), 15, 1887.

274. Sulle superficie del n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni. *Palermo Rend.*, 1, 1887.

275. Extensione di un teorema di Noether. *Palermo Rend.*, 2, 1888.

276. Appunti di geometria ad n dimensioni. *Batt. G.*, 31, 1893.

277. Alcuni sistemi omaloidici di quadriche nello spazio a quattro dimensioni. *Napoli Rend.* (3), 1, 1895.

278. Una trasformazione cremoniana fra spazi a quattro dimensioni. *Napoli Rend.* (3), 2, 1896.

279. Formole e generalità sulla trasformazione cremoniana degli indici 2, 4, 8, fra spazi a quattro dimensioni e suoi casi particolari. *Napoli Rend.* (3), 3, 1897.

Philippow. — 280. Lobatschefsky's Raum und mehrfach ausgedehnter Raum. *Wissenfch. Revue,* 1894.

Pieri. — 281. Sul principio di corrispondenze in uno spazio lineare qualunque ad n dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 3, 1887.

282. Sopra un teorema di geometria a n dimensioni. *Batt. G.*, 26, 1888.

283. Sulla geometria projettiva delle forme di 4^a specie. *Batt. G.*, 28, 1890.

284. Sulla corrispondenza algebrica fra due spazi rigati. *Torino Atti,* 25, 1890.

285. Formule di coincidenza per le serie algebriche ∞^n di coppie di punti dello spazio a n dimensioni. *Palermo Rend.*, 5, 1891.

286, Sopra un problema di geometria enumerativa. *Batt. G.*, 30, 1892.

287. Sul problema degli spazi secanti. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 26, 1893, 27, 1894.

288. Sul problema degli spazi secanti. Nota 3ª. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 28, 1896.

Pilgrim. — 289. Ueber die Anzahl der Theile, in welche ein Gebiet K^{ter} Stufe (Grassmann) durch n Gebiete $(k - 1)^{ter}$ Stufe getheilt werden kann. *Schlömilch Z.*, 24, 1879.

Pincherle. — 290. Applicazione alla geometria d'una osservazione d'aritmetica. *Bologna Rend.*, 1892, 1893.

Pirondini. — 291. Sulle linee a tripla curvatura nello spazio euclideo a quattro dimensioni. *Batt. G.*, 28, 1890.

Poincaré. — 292. Sur l'analysis situs. *C. R.*, 115, 1892,

293. Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres. *C. R.*, 117, 1893.

Predella. — 294. Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. *Annali di mat.* (2), 17, 1889.

295. Sulla teoria generale delle omografie. *Torino Atti*, 27, 1892.

Puchta. — 296. Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raume von vier Dimensionen nebst einem allgemeinen Satz aus der Substitutions theorie. *Wien. Ber.*, 89, 1883.

297. Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper in Räumen von beliebiger Dimensionenzahl. *Wien. Ber.*, 90, 1884.

298. Ueber die allgemeinsten abwickelbaren Räume, ein Beitrag zur mehrdimensionalen Geometrie. *Wien. Ber.*, 101, 1892.

299. Erweiterung einer Gauss'schen Flächensatzes auf mehrdimensionale Ràume. *Prag. Math. Ges.*, 1892.

300. Aufstellung eines neuen dreifach orthogonalen Flächensystems. *Wien. Ber.*, 102, 1893.

Rahnsen. — 301. Sur quelques propriétés des déterminants, appliquées à une question de géométrie à n dimensions. *Delft. Ann. de l'Ec. Polyt.*, 4, 1888.

del Re. — 302. Sui sistemi lineari n-pli di n-spazii. *Palermo Rend.*, 2, 1888.

303. Un teorema nella geometria di una certa classe di corrispondenze. *Batt. G.*, 26, 1888.

304. Sui gruppi completi di tre trasformazioni lineari involutorie negli spazi ad *n* dimensioni. *Rom. Acc.* L. *Rend.* (4), 6, 1890.

305. Sulla successiva proiezione di una varietà quadratica su sè stessa. *Rom. Acc. L. Rend.*, (5), 5, 1896.

RICCI. — 306. Annali di Mat. (2), 12, p. 135.

307. Sui sistemi di integrali independenti di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1° ordine. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 2, 1886.

308. Sulla teoria degli iperspazi. *Rom. Acc. L. Rend.*, (5), 4, 1895.

309. Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque. *Rom. Acc. L. Mem.*, (5), 2, 1896.

RIEMANN. — 310. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Gött. N.*, 13, 1867.

DE LA RIVE. — 311. Sur l'emploi d'une quatrième dimension. *C. R.* 120, 1895.

ROSANES. — 312. Zur Theorie der reciproken Verwandtschaften *Crelle's J.*, 90, 1881.

313. Erweiterung eines bekannten Satzes auf Formen von beliebig vielen Veränderlichen. *Math. Ann.*, 23, 1884.

RUDEL. — 314. Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie. Bamberg, 1877.

315. Sich kreuzende Ebenen zweier Räume, *Bayr. Bl.* 13, 1877.

316. Congruenz und Symmetrie. *Bayr. Bl.* 13, 1877.

317. Vom Körper höherer Dimension. *Progr.* Kaiserslautern, 1882.

318. Ueber eine Gattung von Körpern höherer Dimension. Fürth, 1887.

SCHAPIRA. — 319. Anwendung der Cofunktionen auf die Integration linearer Differentialgleichungen. *Tagebl. d. Naturforscher-Vers.* 1884, p. 61.

SCHEFFERS. — 320. Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. — Ueber die Berechnung von Zahlensystemen. *Leipz. Ber.* 41, 1889.

SCHEFFLER. — 321. Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen. Braunschweig, 1880.

SCHENDEL. — 322. Grundüzge der Algebra nach Grassmann'schen Prinzipien. Halle, 1885.

323. Die *r*-stufige Determinante n^{ten}Grades. *Schlömilch. Z.* 32, 1887.

SCHERING. — 324. Linien, Flächen und höhere Gebilde im mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Raume. *Gött. N* 1873.

325. Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Räumen. *Gött. N.* 1873.

326. Hamilton-Jacobi'sche Theorie für Kräfte, deren Mass von der Bewegung der Körper abhängt. *Gött. Abh.* 18, 1873.

SCHLAEFLI. — 327. Ueber invariante Elemente einer orthogonalen Substitution. *Crelles J.* 56, 1859, 65, 1866.

SCHLEGEL. — 328. Quelques théorèmes de géométrie à *n* dimensions. *Bull. S. M. F.*, 10, 1882.

329. Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde. *Nova Acta d. Leop. Carol. Akad.* 44, 1883.

330. Ueber die Auflösung des Doppelpunktes einer ebenen Curve im dreidimensionalen Raume. *Schloemilch, Z.* 28, 1883.

331. Sur le système de coordonnées réciproque à celui des coordonnées polaires. *Ass. Franç.* 1885 (Congrès de Grenoble).

332. Sur un théorème de géométrie à quatre dimensions. *Ass. Franç.*, 1887 (Congrès de Toulouse).

333. Ueber den sogenannten vierdimensionalen Raum. Berlin. (Dümmler) 1888.

334. Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions. *Palermo Rend.*, 5, 1891.

335. Ueber die verschiedenen Formen von Gruppen, welche r beliebige Punkte im n-dimensionalen Raume bilden können. *Hoppe Arch.* (2), 10, 1891.

336. Ueber congruente Raumtheilungen. *Hoppe Arch.* (2), 1891.

337. Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions. *Bull. S. M. F.* 20, 1892.

338. Projectionsmodelle der regelmässigen vierdimensionalen Körper. Darmstadt, 1886. — Ueber Projectionen der mehrdimensionalen regelmässigen Körper. *Deutsche Math. Ver.* 2, 1893.

Schlumberger. — 339. Ueber n-dimensionale lineare und quadratische Kugelsysteme. *Dissert.* Zürich, 1869.

Schoenflies. — 340. Ueber die Abbildung von Würfeln verschiedener Dimensionen aufeinander. *Gött. Nachr.*, 1896.

Schoute. — 341. Voordracht over de regelmatige lichamen in ruimte van meer dimensies. Algemeene Vergadering van het derde natuuren scheikundig congres to Utrecht, 1891.

342. Le déplacement le plus général dans l'espace à n dimensions. *Delft Ann. de l'Éc. Polyt.* 7, 1891.

343. Regelmässige Schnitte und Projectionen des Achtzells, Sechzehnzells und Vierundzwanzigzells im vierdimensionalen Raume. *Amst. Akad. Verh.*, Sect. 1, Deel. 2, 1893.

344. Regelmassige Schnitte und Projectionen des Hunderszwanzigzells und Sechshundertzells im vierdimensionalen Raume. *Amst. Akad. Verh.*, Sect. 1, Deel 2, 1893.

345. Sur trois divisions régulières de l'espace à n dimensions. *Assoc. Franç.* 1894. (Congrès de Caen).

346. Sur les types de cristaux du système régulier de l'espace à quatre dimensions. *Assoc. Franç.* 1895. (Congrès de Bordeaux).

347. Het vierdimensionale prismoïde. *Amsterd Verhandl d. Akad.* 5, 1896.

348. Quelques figures à $(n + 2)$ inversions dans l'espace à n dimensions. *Arch. Feyler.* (2), 5, 1896.

Schubert. — 349. Ueber eine gewisse Familie von Configurationen. *Hamb. Mitt.*, 1884.

350. Die dimensionalen-n Verallgemeinerungen des dreidimensionalen Satzes, dass es zwei Strahlen giebt, welche vier gegebene Strahlen schneiden. *Hamb. Mitt.*, 1884.

351. Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Annahlen unseres Raumes. *Math. Ann.*, 26, 1885.

352. Die n-dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Fangenten einer punktallgemeinen Fläche m^{ten} Grades. *Math. Ann.* 26, 1885.

353. Lösung des Characteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension. *Hamb. Mitt.*, 1886.

354. Anzahlbestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension. *Acta Math.*, 8., 1896.
355. Ueber Räume 2^h Grades. *Hamb.Mitt.*, 1889.
356. Kegelschnitt-Anzahlen als Funktionen der Raumdimension *n*. *Hamb. Mitt.*, 1890.
357. Beziehungen zwischen den linearen Räumen auferlegbaren characteristischen Bedingungen. *Math. Ann.*, 38, 1891.
358. Mittheilung aus der abzählenden Geometrie *p*-dimensionaler Räume 1^{ten} *u.* 2^{ten} Grades. *Naturf. Ges. Halle.*, 64, 1891.
359. Beitrag zur Liniengeometrie in *n*-Dimensionen. *Hamb. Mitt.*, 1892.
360. Mittheilungen a. d. abzählenden Geometrie *p*-dimensionaler Räume ersten und zweiten Grades. *Deutsche Math. Ver.*, 1, 1892.
361. Allgemeine Anzahlfunktionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume 2^{ten} Grades in *n* Dimensionen. *Math. Ann.*, 45, 1894.
Schumacher. — 362. Klassifikation der algebraischen Strahlensysteme. *Math. Ann.*, 37, 1890.
Schur. — 363. Ueber die Deformation der Räume constanten Riemannschen Krümmungsmasses. *Math. Ann.*, 27, 1886.
364. Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume. *Math. Ann.*, 28, 1887.
365. Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen. *Math. Ann.*, 33, 1888.
Segre. — 366. Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensione. *Torino Mem.* (2), 36, 1884.
367. Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche. *Torino Mem.* (2), 36, 1884.
368. Ricerche sui fasci di coni quadrichi in uno spazio lineare qualunque. *Torino Atti.*, 19, 1884.
369. Sulle teorie e sulle classificazione delle omographie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Rom. Acc. L. Mem.* (3), 19, 1884.
370. Etude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions. *Math. Ann.*, 24, 1884.
371. — Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque. *Torino Atti.* 19, 1884.
372, 373. Ricerche sulle omographie e sulle correlazioni in generale e particolamente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta. *Torino Mem.* (2), 37, 1885.
374. Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie simplici razionali di piani. *Torino Atti.*, 21, 1886.
375. Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes. *Math. Ann.*, 27, 1886.
376. Sugli spazi fondamentali di un'omographia. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 2, 1886.
377. Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine. *Torino Atti.*, 21, 1886.
378. Sur un théorème de la géométrie à *n* dimensions. *Math. Ann.*, 30, 1887.
379. Nuovi resultati sulle rigate algebriche di genere qualunque. *Torino Atti.*, 22, 1887.

380. Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques. *Math. Ann.*, 30, 1887, 34, 1889.

381. Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazii. *Rom. Acc. L. Rend.* (4). 3, 1887.

382. Sulla varietà cubica con dieci punti doppii dello spazio a quattro dimensioni. *Torino Atti.*, 22, 1887.

383. Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p. *Palermo Rend.*, 1, 1887.

384. Intorno alla geometria su una rigata algebrica. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 3, 1877.

385. Sulle curve normali di genere p dei varii spazii. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 21, 1888.

386. Alcune considerazioni elementari sull' incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni. *Palermo Rend.*, 2, 1888.

387. Un osservazione sui sistemi di rette degli spazii superiori. *Palermo Rend.*, 2, 1888.

388. Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario. *Torino Mem.* (2) 39, 1888.

389. Sulle variatà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi. *Palermo Rend.* 5, 1891.

390. Sulla forma Hessiana. *Rom. Acc. L. Rend.* (5), 4, 1895.

391. — Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche. *Torino Atti.*, 31, 1896.

Sharp. — 392. Solution of question 8242. *Ed. Times.* 47, 1887.

393-394. On the properties of simplicissima (with especial regard to the related spherical loci). *Lond. M. S. Proc.*, 18, 1887.

395. On simplicissima in space of *n* dimensions. *Lond. M. S. Proc.*, 19, 1888.

396. Solution of question 9098. *Ed. Times*, 48, 1888.

Sharp et Sylvester. — 397. Solution of questions 8864 and 9004. *Ed. Times*, 48, 1888.

398. On simplicissima in space of *n* dimensions. *Lond. M. S. Proc.*, 21, 1890.

Shaw. — 399. Development of the A-process in quaternions, with a geometrical application. *American J.*, 19, 1897.

Simony. — 400. Ueber jene Flächen, welche aus ringförmig geschlossenen knotenfreien Bändern durch in sich selbst zurückkehrende Längsschnitte erzeugt werden. *Wien. Ber.*, 1880.

401. Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie. *Math. Ann.*, 19, 1882; 24, 1884.

402. Eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. *Wien. Anz.*, 1882.

403. Ueber zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraïschen Grund operationen. *Wien. Ber.*, 1885.

Spottiswoode. — 404. Sur la représentation des figures de géométrie à *n* dimensions par les figures corrélatives de géométrie ordinaire. *C. R.*, 71, 1875.

405. Nouveaux exemples de représentation par des figures de géométrie, des conceptions analytiques de géométrie à *n* dimensions. *C. R.*, 71, 1875.

Staeckel. — 406. Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik und den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme. *Crelle's J.*, 107, 1891.

407. Ueber die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit. *Math. Ann.*, 42, 1893.

408. Ueber Biegungen von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. *Crelle's Journ.*, 113, 1894.

Stouff. — 409. Sur une généralisation de la formule de l'aire du triangle sphérique. *C. R.*, 122, 1896.

Stringham. — 410. Regular figures in n-dimensional space. *American Journ.*, 3, 1880.

Study. — 411. Ueber Distanzrelationen. *Schloemilch Z.*, 27, 1882.

412. Ueber die Geometrie der Kegelschnitte. *Habilitationsschrift*, Leipzig, 1885.

413. Ueber Systeme von complexen Zahlen. *Gött. N.*, 1889.

414. Complexe Zahlen und Transformationsgruppen. *Leipz. Ber.*, 41, 1889.

415. Abbildung der Mannigfaltigkeit aller Kegelschnitte einer Ebene au einen Punktraum. *Math. Ann.*, 40, 1892.

Suworof. — 416. Extrait d'un mémoire (Kasan, 1871) dans *Darboux Bull.*, 4.

Tonelli. — 417. Sulla connessione degli spazi. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 6, 1890.

Vahlen. — 418. Sur la surface de Fresnel. *Nouv. Ann.* (3), 14, 1895.

Veronese. — 419. Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens. *Math. Ann.* 19, 1881.

420. Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Characteren einer Curve im Raume von n Dimensionen stattfinden. *Math. Ann.*, 18, 1881.

421. Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni. *Ven. Ist. Atti.* (5), 8, 1882.

422. Formola di una serie comprendente le formole di Kantor. *Ven. Ist. Atti.* (6), 2, 1884.

423. Fondamenti di geometria a più dimensioni ùa più spezie di unità rettilinee esposti in forme elementare. Padova, 1891.

Visalli. — 424. Sulle correlazioni in due spazi a tre dimensioni. *Rom. Acc. L. Mem.* (4), 3, 1896.

Vivanti. — 425. Fondamenti della teoria dei tipi ordinati. *Annali di mat.* (2), 17, 1889.

Volterra. — 426. Delle variabili complessi negli iperspazi. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 5, 1889.

427. Sulle funzioni conjugate. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 5, 1889.

428. Sulle funzioni di iperspazi e sui loro parametri differenziali. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 5, 1889.

429. Sulla integrazione di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teoria delle funzioni conjugate. *Palermo Rend.*, 3, 1889.

430. Sulle variabili complesse negli iperspazi. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 6, 1890.

Voss. — 431. Zur Theorie der Transformation quadratischer Differential-Ausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 16, 1880.

Waelsch. — 432. Zur Construction der Polargruppen. *Wien. Ber.*, 100 1891.

Weierstrass. — 433. Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. *Gött. Nachr.* 1884.

Weyr. — 434. Note sur la théorie des quantités complexes formées avec *n* unités principales. *Darb. Bull.*, (2), 11.

Zecca. — 435. Sopra una classe di curve razionali. *Batt. G.*, 25, 1887.

Zimmermann. — 436. Henry More und die vierte Dimension des Raumes. Wien., 1881.

Zindler. — 437. Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in unserem Raume ; lineare Complexe und Strahlensysteme in demselben. *Wien. Ber.*, 101, 1892.

438. Synthetische Gewinnung geometrischer linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen. *Crelles' J.*, 111, 1893.

Zœllner. — 439. Ueber die Natur der Kometen. Leipzig, 1872, p. 305-312.

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

ET LES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

I

Quelques analystes intransigeants ont décrété que la Géométrie ne saurait avoir d'existence propre et qu'elle ne pouvait prétendre qu'à illustrer parfois des concepts analytiques ; d'autres mathématiciens peut-être plus clairvoyants ont apprécié dans l'intuition de l'étendue une puissance synthétique organisée, une instinctive divination dont la science du nombre a pu recevoir quelque lumière.

Dans le procès de préséance qui reste ainsi pendant entre deux tendances de l'esprit humain gardons-nous d'affirmer un de ces arrêts que les progrès de la science révisent tous les jours.

Plus modeste et plus précis est le but que je poursuis en ce moment dans cet article ; je constate d'abord le rôle que la Géométrie joue nécessairement dans la phase primaire de la culture mathématique : c'est un rôle d'initiation ; je me demande