SUR L'UTILITÉ DE LA NOTION DE L'INFINI DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Autor(en): **Ripert, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3556

SUR L'UTILITÉ DE LA NOTION DE L'INFINI

DANS L'ENSEIGNEMENT

DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Un caractère commun aux Cours de Géométrie plane est l'absence presque totale de notions sur l'infini, les points et la droite de l'infini. Il suffit de citer, à titre d'exemples et pour constater le fait, le traité de MM. Rouché et de Comberousse et les ouvrages récents de M. Hadamard et de MM. Niewenglowski et Gérard. C'est évidemment une omission volontaire, que ne suffirait pas à expliquer le silence des programmes, dans des ouvrages qui, avec raison, les complètent en beaucoup de points : elle prouve que l'introduction dans l'enseignement des notions dont il s'agit n'a pas été jusqu'à présent jugée utile. Mais l'enseignement de la Géométrie est actuellement dans une période de transformation qu'attestent surabondamment les nombreux ouvrages parus en France et à l'étranger depuis le commencement de 1898 (1). Il est donc permis de se demander si l'omission des notions sur l'infini en Géométrie est logique et conforme à la situation générale actuelle de l'enseignement.

« La notion mathématique de l'infini s'est indirectement pré-
« sentée à nous dès le début de l'Arithmétique. En formant suc-
« cessivement les nombres entiers, il tombe sous le sens que la
« suite qu'ils forment ne s'arrête jamais... Cette notion revient
« encore à propos des nombres premiers... Mais c'est surtout

---

(1) Voir *Enseignement mathématique*, n° 1, p. 56, et, pour les ouvrages de M. Hadamard et de MM. Niewenglowski et Gérard, les nos 2 et 3 du même recueil. Aux ouvrages cités au n° 1, on peut ajouter : en Belgique, *Cours de Géométrie élémentaire*, de M. Ad. Mineur; en Allemagne, *Lehrbuch der Elémentar-Geometria*, de MM. J. Henrici et P. Treutlein ; en Amérique, *New Plane and Solid Geometry*, de MM. W.-W. Beman et D.-E. Smith, et probablement d'autres.

« dans l'étude des fractions que l'idée de l'infini se présente sous « une forme qui nous oblige à l'introduire dans le calcul lui-« même : je veux parler de la couversion des fractions ordi-« naires en décimales, laquelle donne naissance aux fractions « décimales périodiques... Ce sont encore les fractions qui « amènent pour la première fois à l'idée de l'infiniment petit... » (C. A. LAISANT, *La Mathématique*, p. 36).

En Algèbre, l'idée de l'infini se présente partout : dans les équations du premier degré avec l'interprétation de la forme $\frac{m}{o}$; dans les équations du second degré lorsque le coefficient du premier terme ou le terme tout connu tend vers zéro (racine infiniment grande ou infiniment petite) ; dans l'étude de la variation des fonctions, dans celle des progressions, etc. D'ailleurs, la notion de fonction est indissolublement liée à celle de continuité, qui tire son origine de l'infini et en implique l'idée (CHASLES, *Aperçu historique*, Note XXIV).

Ainsi, la notion de l'infini se trouve bien nettement implantée dans l'enseignement de l'Arithmétique et de l'Algèbre ; elle se retrouve également en Trigonométrie : par exemple, dans l'identité $\sin a \equiv \sin (a + 2k\pi)$, pour l'infiniment grand, et dans la limite de $\frac{\sin x}{x}$, pour l'infiniment petit. Dans ces conditions, son exclusion de l'enseignement de la Géométrie, qui est la science la plus propre à en faire saisir l'utilité et les applications, ne serait justifiée que si cette notion y était inutile et inféconde, ou s'il était impossible de la présenter sous une forme suffisamment simple et élémentaire. Nous allons essayer de prouver qu'il n'en est pas ainsi [1].

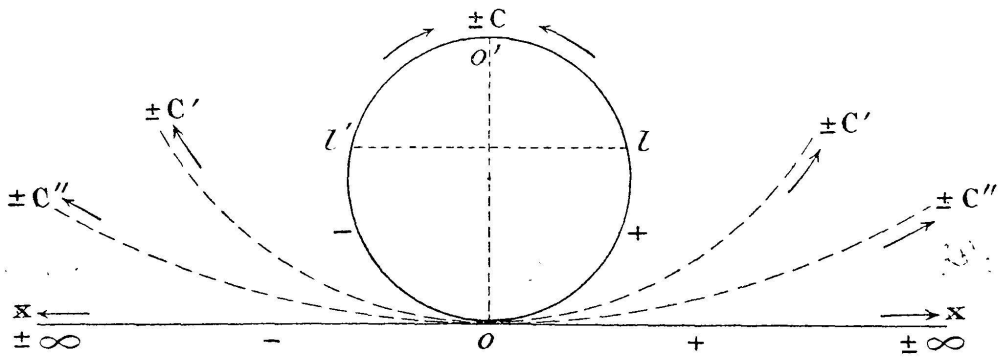
Parmi les ouvrages que nous avons cités, un seul, le Cours de MM. Niewenglowski et Gérard, introduit, comme il suit, la notion du point à l'infini d'une droite. Après avoir étudié, au début du Livre III, d'une manière analogue à celle que l'on trouve dans les autres ouvrages, la variation du rapport $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \lambda$ quand le point M décrit la droite indéfinie déterminée par les points A et B, les auteurs disent (p. 120) : « Donc, λ prend une

[1] Nous ne nous occuperons que de l'infini (infiniment grand). L'infiniment petit est utilisé aux livres III et IV (périmètres et isopérimètres, aires).

« fois, et une fois seulement, toutes les valeurs positives ou « négatives, sauf la valeur $+1$. Pour combler cette lacune, nous « dirons que $\lambda = 1$, quand le point M est *à l'infini* à droite ou « à gauche, et, pour qu'il n'existe qu'une position de M cor- « respondant à chaque valeur de λ, nous dirons que le *point à* « *l'infini de droite* est le même que le *point à l'infini de gauche.* »

Certes, il y a là une indication excellente, et la division harmonique, que les auteurs exposent ensuite, fournit une application immédiate. Mais, cette façon de s'arranger pour combler une lacune ne peut satisfaire l'esprit qui reste inquiet devant deux points qui se confondent en un seul bien que paraissant situés à des antipodes, et cela d'autant plus que c'est la première fois que ce mode de raisonnement, qui pourra devenir très utile par la suite, se présente. C'est un postulatum très difficile à admettre et qui est cependant introduit sans nécessité, car on peut le faire disparaître en démontrant préalablement le théorème suivant :

Une droite indéfinie x'x, *sur laquelle* O *est l'origine des vecteurs et* x'x *le sens positif, n'a pas deux points à l'infini, l'un* x' *à la distance* $-\infty$, *l'autre* x *à la distance* $+\infty$, *mais un seul point* (x'x) *à la distance* $\pm\infty$.



En effet, traçons un cercle OO' de rayon arbitraire, tangent en O à x'x, et supposons deux courriers, partant de O au même instant précis, parcourant le cercle, l'un dans le sens positif OlO', l'autre dans le sens négatif OL'O', en marchant avec la même vitesse et dans des conditions absolument identiques. Ils seront toujours à la même hauteur (l, l') et ils arriveront *simultanément* au point O' diamétralement opposé à O. Chacun d'eux aura alors parcouru la moitié de la *circonférence* du cercle (14, 15) (1), que

(1) Les numéros renvoient au Cours de MM. Niewenglowski et Gérard.

nous désignerons par $2C$. Or, le point O' est évidemment à la distance $\pm C$ de l'origine O ; il doit être coté $\pm C$, car il est $+C$ du fait du courrier *positif* et $-C$ du fait du courrier *négatif.* Il en sera ainsi quel que grand que soit le rayon du cercle, et, quand ce rayon, d'abord infiniment grand, deviendra, par convention, infini, le *point unique* $\pm C$ deviendra le *point unique* $\pm\infty$. Mais le cercle se confond alors visiblement avec la droite $x'x$; donc, etc.

La place de ce théorème est au début du Livre III, immédiatement après la définition du sens positif ou négatif des vecteurs (143), par conséquent avant l'étude (146) de la variation du rapport $\frac{MA}{MB} = g$ qu'il élucide complètement. Il conviendra d'ailleurs de montrer sa concordance avec le théorème que l'on a dû démontrer en Algèbre : *l'infini, pas plus que zéro, n'a de signe déterminé ;* car, des égalités, telles que $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$, seraient dépouvues de signification si, en même temps que l'on peut remplacer identiquement 0 par ± 0, on ne ne pouvait pas remplacer de même ∞ par $\pm\infty$.

Examinons maintenant quelques conséquences.

On a défini la ligne droite en admettant sa propriété caractéristique : *Par deux points donnés, on peut toujours faire passer une droite et on n'en peut faire passer qu'une.* On a spécifié, en général sans autre explication, que la ligne droite est indéfinie dans les deux sens ; un commentaire sur le mot *indéfinie* et ses synonymes (illimitée, de développement infini, d'arrêt impossible ou à l'infini) n'eût pas été inutile ; nous supposons qu'il a été fait dans l'enseignement oral et mis en concordance avec les explications de même nature déjà données au moins en Arithmétique. Un peu plus loin, on a appelé *droites parallèles* deux droites du plan qui, si loin qu'on les prolonge dans les deux sens, ne se rencontrent pas. On a dû faire remarquer alors que, par suite, si deux parallèles se rencontrent, ce ne peut être que dans leur région indéfinie (ou à l'infini, ou impossible) précédemment indiquée. Donc, *dès que le théorème du point à l'infini d'une droite aura été démontré*, il aura le corollaire suivant : puisqu'une droite n'a qu'un seul point à l'infini, on ne peut faire passer qu'une droite par un point A et ce point de l'infini ; en d'autres termes, *on ne* *peut mener par un point* A, *qu'une parallèle à une droite donnée.*

Ce n'est pas une démonstration du postulatum d'Euclide. puisqu'elle ne vient pas à la place utile; mais c'en est une *justification a posteriori*, qui permettrait, lorsque l'on énonce ce postulatum au Livre I^{er}, de dire : « Nous l'admettons ici comme un axiôme, ou comme une vérité expérimentale et facile à comprendre ; nous le démontrerons plus loin. » C'est ce que l'on fait pour l'*existence* de la bissectrice, de l'aire, et pour bien d'autres notions qui se complètent et se précisent peu à peu et qu'il est nécessaire cependant de faire entrevoir le plus tôt possible, en les éclairant par des explications avant qu'on soit en mesure d'en donner une démonstration.

Peut-être même serait-il possible d'aller plus loin. En nous appuyant sur un principe qui n'est guère contesté aujourd'hui, celui de la marche parallèle de l'Algèbre et de la Géométrie, faisons les hypothèses suivantes : 1° On a commencé l'Algèbre, conformément au programme, par la définition des nombres négatifs, et entrepris ensuite l'étude de la Géométrie; 2° on a placé, avec MM. Niewenglowski et Gérard, dans l'Introduction même, les premières notions sur le cercle, comprenant sa division en deux parties égales par un diamètre OO', puis établi la théorie des perpendiculaires, mais pas encore celle des parallèles (contrairement à l'ordre adopté par les auteurs que nous venons de citer, mais conformément à l'usage traditionnel et aux programmes eux-mêmes). Rien ne nous semble empêcher alors de définir la tangente en cercle (86), de placer immédiatement après le théorème du point à l'infini, et enfin, la définition des parallèles donnée, d'en tirer la conclusion indiquée ci-dessus. Cette opinion est peut-être contestable; fût-elle juste, il y aurait lieu d'examiner si l'on doit faire, dans l'ordre des matières, les modifications qu'elle comporte. Mais, selon nous, MM. Niewenglowski et Gérard, en commençant la Géométrie simultanément par la droite et le cercle, sont entrés dans un ordre d'idées très important et dont il convient d'étudier les conséquences. En admettant même que notre argumentation soit insuffisante, la question suivante peut être posée : Toute idée de cercle étant exclue du premier Livre, le postulatum d'Euclide est reconnu impossible à démontrer ; en est-il de même dans l'hypothèse contraire ?

Quoi qu'il en soit, le point à l'infini d'une droite ayant été défini, il y a évidemment lieu d'examiner ce qu'il donne quand on l'introduit dans les théories des transversales, du rapport anharmonique, de l'involution, des polaires, etc., puis de montrer que tous les théorèmes concernant les faisceaux de droites concourantes subsistant, *ipso facto*, pour les faisceaux de droites parallèles. Un grand nombre d'applications sont possibles.

Après la notion du point de l'infini d'une droite, doit venir, *en Géométrie plane même* (1), celle de la droite de l'infini du plan. Elle est une conséquence immédiate de la première : car une droite est la seule ligne avec laquelle une droite arbitraire puisse avoir un seul point commun (2).

Comme application, on peut dire : Si l'on considère une droite de direction fixe s'éloignant indéfiniment d'un cercle, son pôle, sur le rayon perpendiculaire, tend vers le centre ; d'où il résulterait, *comme première apparence*, que le centre est le pôle de toutes les droites de l'infini, dans toutes les directions. Mais un point quelconque du plan ne peut avoir qu'une polaire par rapport à un cercle donné (232) ; donc, la considération de toutes ces droites se confondant en une seule *de direction indéterminée* est justifiée, comme nécessaire et suffisante. D'ailleurs, il a été démontré (235) que toutes les droites qui pivotent autour d'un point fixe ont leurs pôles en ligne droite ; donc, les pôles de tous les diamètres, points à l'infini dans toutes les directions, sont situés sur une même droite, *la droite de l'infini*, etc.

---

(1) MM. Rouché et de Comberousse expliquent la conception de la droite de l'infini d'un plan à la fin du livre V (premier de la Géométrie de l'espace) comme conséquence de la projection perspective. La notion ainsi donnée est indiscutable ; mais elle semble tardive. Elle ne devrait venir à cette place, croyons-nous, que comme une confirmation des notions données en géométrie plane. — Dans le cours de MM. Niewenglowski et Gérard, la notion de la droite de l'infini est rejetée plus loin encore (Compléments du livre VIII).

(2) De même, la conception du plan de l'infini de l'espace résulte de ce qu'un plan est la seule surface : 1° qui soit rencontrée par une droite arbitraire en un point unique ; 2° qui soit coupée par un plan arbitraire suivant une droite unique. Ainsi l'ensemble des conceptions relatives à l'infini résulte de celle du point à l'infini d'une droite.

Toutes ces considérations et bien d'autres que l'on peut ajouter (hexagone de Pascal dont les côtés sont parallèles, triangles homologiques devenant homothétiques, etc.) sont du domaine élémentaire *du plan*. En les présentant, on pourra parler d'une lacune à combler; le raisonnement sera alors compris, parce qu'on l'a déjà rencontré et commenté.

Ce qui précède suppose, bien entendu, que les élèves ont quelques notions sur la continuité. Mais d'abord, ces notions sont extrêmement simples; en second lieu, on commence à reconnaître (Voir, par exemple, les *Leçons d'Algèbre* de M. Bourlet) qu'il est indispensable de les introduire dans les cours d'Algèbre élémentaire, et dès lors, on doit en tenir compte dans les cours de Géométrie, au moins lorsque l'on arrive au Livre III. C'est dans ce livre en effet que l'on étudie la construction des racines des équations du second degré et ses applications géométriques ; ces équations et l'étude de variation des fonctions qui en est l'application algébrique immédiate, doivent donc être considérées comme acquises.

Si l'on admet en outre, avec M. Bourlet [et conformément d'ailleurs aux programmes (classe de première sciences)], que les premières notions de géométrie analytique relatives à la droite doivent accompagner la théorie des équations du premier degré, l'introduction en Géométrie de la notion de l'infini sera considérablement facilitée ; car il n'y a qu'un mot à dire pour faire comprendre que l'équation d'une droite est implicitement homogène, et passer de là à une notion analytique du point à l'infini d'une droite et de la droite de l'infini du plan, confirmant d'une manière éclatante, par une simple discussion de coefficients, les notions géométriques données.

Nous pensons donc, en résumé, que des notions sur l'infini géométrique sont très utiles, que l'on peut les exposer de façon qu'elles ne dépassent nullement le niveau des cours de mathématiques élémentaires, et que leur introduction s'impose *a fortiori* dans des Traités plus complets, tels que ceux que nous avons cités et qui ont unanimement reconnu la nécessité de compléments destinés à l'exposition des théories de la Géométrie moderne.

L. Ripert (Paris).