

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 2 (1900)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** THÉORÈMES DE BEZOUT ET D'EULER  
**Autor:** Poussart, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3558>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# THÉORÈMES DE BEZOUT ET D'EULER

---

L'établissement de la formule  $AU + BV = R_n$  et l'évaluation des degrés des polygones  $U$  et  $V$  se font généralement d'une façon lourde et pénible ; je me propose de donner une démonstration plus rapide et beaucoup plus facile à présenter.

A polynôme de degré  $m$ ,  $B$  de degré  $p$ ,  $m > p$ . La recherche du plus grand commun diviseur donne les identités

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} A &= BQ + R \\ B &= RQ_1 + R_1 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ R_{n-2} &= R_{n-1}Q_n + R_n \end{aligned} \right\}$$

ou

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} R &= A - BQ \\ R_1 + RQ_1 &= B \\ R_2 + R_1Q_2 - R &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ R_n + R_{n-1}Q_n - R_{n-2} \dots\dots &= 0 \end{aligned} \right\}$$

1°  $AU + BV = R_n$ ,  $U$  et  $V$  polynômes entiers.

Je résous le système (2) par rapport à  $R_n$  ; le déterminant des inconnues est  $\pm I$ .

$$(3) \quad \pm R_n = \begin{vmatrix} A - BQ & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 1 \\ B & & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 1 Q_1 \\ 0 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & 1 Q_2 - 1 \\ 0 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & 1 Q_3 - 1 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & Q_n - 1 & 0 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

d'où

$$R_n = AU + BV.$$

2° Si  $R_n$  est de degré  $q$ ,  $U$  est de degré  $p - q - 1$  au plus et  $V$  de degré  $m - q - 1$  au plus.

Le terme de degré le plus élevé dans  $U$  est contenu dans  $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ , celui de  $V$  dans  $QQ_1 \dots Q_n$ ; je multiplie membre à membre les identités (1).

$$ABRR_1 \dots R_{n-2} = BRR_1 \dots R_{n-1} QQ_1 \dots Q_n + \dots$$

Si on tient compte des facteurs communs aux premiers termes des deux membres, on voit que  $QQ_1 \dots Q_n R_{n-1}$  est du degré de  $A$ . Or  $R_n$  est de degré  $q$ ,  $R_{n-1}$  est donc au moins de degré  $q + 1$ , par suite  $QQ_1 \dots Q_n$  est au plus de degré  $m - q - 1$  et comme  $Q$  est de degré  $m - p$ ,  $Q_1 Q_2 \dots Q_n$  est au plus de degré  $p - q - 1$ .

#### CONSÉQUENCES

I. Si  $R_n$  est le plus grand commun diviseur,  $U$  et  $V$  sont premiers entre eux,

$R_n$  contient les facteurs communs à  $A$  et  $B$  et ne contient qu'eux, donc  $U$  et  $V$  ne peuvent avoir de facteur commun.

II. Les polynômes  $U$  et  $V$  sont les seuls polynômes de degré  $p - q - 1$ ,  $m - q - 1$  ou de degré inférieur vérifiant la relation  $AU + BV = R_n$  :

Si on avait

$$AU_1 + RV_1 \equiv R_n$$

on en conclurait :

$$A(u - U_1) \equiv B(V_1 - V).$$

Or  $A$  et  $B$  ont  $q$  facteurs communs, donc les  $m - q$  autres facteurs de  $A$  devraient diviser  $V_1 - V$  qui est de degré  $m - q - 1$  au plus.

III. *Théorème de Bezout.* —  $AU + BV = 1$ . — Si  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux,  $q$  degré du plus grand commun diviseur est nul, divisant par  $R_n$ ,

$$AU + BV = 1.$$

Les théorèmes I et II s'appliquent encore à  $U$  et  $V$ .

IV. *Théorème d'Euler.* — La condition nécessaire et suffisante pour que A et B aient un plus grand commun diviseur de degré  $q$ , est qu'on puisse trouver deux polynômes premiers entre eux, U de degré  $p - q$ , V de degré  $m - q$  et tels que :

$$AU + BV = 0.$$

1° La condition est nécessaire. Supposons  $R_n = 0$ , l'identité fondamentale devient

$$AU + BV = 0.$$

Le plus grand commun diviseur est alors  $R_{n-1}$  qui est de degré  $q$ , il en résulte d'après le n° 2 que U est de degré  $p - q$  et V de degré  $m - q$ .

U et V sont premiers entre eux, car s'ils avaient un commun diviseur du premier degré, on aura après l'avoir supprimé :

$$AU_1 + BV_1 = 0$$

$$U_1 \text{ de degré } p - q - 1 \quad V_1 \text{ de degré } m - q - 1.$$

En admettant que les  $p - q - 1$  facteurs de  $U_1$  appartiennent à B, il y aurait encore  $q + 1$  facteurs de B qui devraient appartenir à A, ce qui est contre l'hypothèse.

2° La condition est suffisante. V de degré  $m - q$  est premier avec U, donc ses  $m - q$  facteurs appartiennent à A et il reste  $q$  facteurs de A qui appartiennent à B.

A. POUSSART (Paris).

---