III

III

Après avoir établi cette distinction entre le caractère philosophique de la Mathématique pure et abstraite et celui de la Mathématique concrète (Géométrie et Mécanique) Comte développe en détail ses idées sur la relation qui existe entre les deux branches de cette science. Il commence l'exposé de ses idées par une définition générale de toutes les mathématiques : « Nous sommes donc parvenus maintenant à définir avec exactitude la science mathématique, en lui assignant pour but la mesure indirecte des grandeurs et en disant qu'on s'y propose constamment de déterminer les grandeurs les unes par les autres d'après les relations précises qui existent entre elles. [1] »

Étant obligé d'examiner dans chaque phénomène plusieurs quantités liées dans leurs changements : « il en résulte l'étendue naturellement indéfinie et même la rigoureuse universalité logique de la science mathématique. » La définition que Comte donne des mathématiques le persuade en même temps que ce n'est qu'en les étudiant que nous pourrons acquérir les véritables notions de la nature de la science : « Toute science consiste dans la coordination des faits ; si les diverses observations étaient entièrement isolées, il n'y aurait pas de science. On peut même dire généralement, que la science est essentiellement destinée à dispenser, autant que le comportent les divers phénomènes, de toute observation directe, en permettant de déduire, du plus petit nombre possible de données immédiates, le plus grand nombre possible de résultats. »

Ces particularités caractéristiques d'une science sont fortement prononcées dans les mathématiques. C'est pour cela que : « toute éducation scientifique qui ne commence point par une telle étude pèche nécessairement dans sa base. C'est donc par l'étude des mathématiques, et seulement par elle, que l'on peut se faire une idée juste et approfondie de ce que c'est qu'une science. C'est là uniquement qu'on doit chercher à connaître avec précision la méthode générale que l'esprit humain emploie constamment

---

(1) *Cours de philosophie positive*, t. I, p. 129.

dans toutes ses recherches positives, parce que nulle part ailleurs les questions ne sont résolues d'une manière aussi complète, et les déductions prolongées aussi loin avec une sévérité rigoureuse. » C'est en mathématiques que notre esprit, selon Comte, a prouvé le plus sa force.

Le but des recherches mathématiques étant toujours la détermination de quantités inconnues à l'aide des relations qui existent entre elles et d'autres quantités données, chaque recherche doit comprendre deux parties : 1° la définition des relations qui existent entre les quantités qui varient ensemble dans le cas donné; et 2° le calcul des quantités inconnues à l'aide des relations données. La première partie (concrète) de chaque recherche mathémathique dépend du phénomène considéré ; et la solution de la question demandée doit être nécessairement fondée sur la considération du monde extérieur, et ne peut jamais être remplacée par une série d'opérations intellectuelles. Le but de cette partie concrète est de remplacer les relations entre les quantités (fonctions concrètes) par les équations entre les nombres, où ne peuvent entrer que des fonctions abstraites, examinées dans les mathématiques pures. C'est par ce remplacement qu'a lieu le passage du concret à l'abstrait, et c'est sur l'importance de ce passage que Comte s'arrête avec détail. L'idée mère de ce passage, il la voit dans la Géométrie analytique ; et c'est par là qu'on peut expliquer le respect qu'il éprouvait pour Descartes et la révolution philosophique qu'il opéra dans la Géométrie. Le seul traité de Comte concernant les mathématiques, *Traité élémentaire de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions* [1], avait pour but d'expliquer l'avantage des méthodes générales sur les méthodes spéciales applicables seulement à de certaines courbes, traitées par les géomètres de l'antiquité. Le traité de Comte se distingue avantageusement des autres manuels de Géométrie analytique par l'attention avec laquelle il étudie les théories géométriques générales pour toutes les courbes : la théorie du nombre de points nécessaire pour la définition des courbes, celle des tangentes et des asymptotes, celle des diamètres, celle des courbes semblables,

---

[1] Paris, 1843. Une nouvelle édition a été publiée par les positivistes du Brésil en 1894.

des quadratures, etc. L'importance du remplacement des relations concrètes entre les quantités liées dans leurs variations, par les relations abstraites entre les nombres, dépend surtout de ce que les recherches des mathématiques abstraites sont générales et peuvent être également appliquées aux différents cas.

Les mêmes relations peuvent se rencontrer dans l'étude de phénomènes différents ; et dans ce cas la théorie de ces phénomènes présente aux mathématiciens la même question : « La même loi, qui règne entre l'espace et le temps, quand on examine la chute verticale d'un corps dans le vide, se retrouve pour d'autres phénomènes qui n'offrent aucune analogie avec le premier d'entre eux, car elle exprime aussi la relation entre l'aire d'un corps sphérique et la longueur de son diamètre ; elle détermine également le décroissement de l'intensité de la lumière ou de la chaleur à raison de la distance des objets éclairés ou échauffés, etc. » (1)

L'Analyse mathématique permet d'établir une coordination parfaite dans l'étude des phénomènes. Car les conceptions ayant été généralisées et simplifiées le plus possible, à tel point qu'une seule question analytique, résolue abstraitement, renferme la solution implicite d'une foule de questions physiques diverses, il doit nécessairement en résulter pour l'esprit humain une plus grande facilité à apercevoir des relations entre des phénomènes qui semblaient d'abord entièrement isolés les uns des autres. C'est ainsi qu'en examinant la marche de notre intelligence dans la solution des questions importantes de la Géométrie et de la Mécanique, nous voyons surgir naturellement, par l'intermédiaire de l'Analyse, les rapprochements les plus fréquents et les plus inattendus entre des problèmes qui n'offraient primitivement aucune liaison apparente. » (2)

Ces raisonnements de Comte sur l'analogie des formules mathématiques dans les divers phénomènes sont une prévision ingénieuse du chemin que la Physique mathématique suivit au XIXe siècle.

Cauchy, Lamé, Chasles, Thomson (Lord Kelwin), Helmholz, Kirchoff et d'autres ont recouru aux analogies mathématiques dans leurs recherches sur les lois d'attraction, sur le calorique, etc. Mais c'est surtout depuis les recherches de Maxwell que l'étude

(1) *Cours de phil. posit.*, t. I, p. 137. — (2) *Ibid.*, t. I, p. 146.

des analogies qui existent entre les différentes parties de la Physique est devenue de toute importance pour l'étude des phénomènes physiques ; elle a eu de l'influence sur la nature des théories physiques et l'importance des formules mathématiques. Nous avons rompu avec la mythologie mécanique et, comme le dit Mach : les formules mathématiques ne sont pas considérées comme des lois qui gouvernent le monde, mais comme les descriptions les plus concises des phénomènes, par conséquent les plus économiques.

Le côté économique de la pensée scientifique, bien prononcé dans les Mathématiques, est parfaitement expliqué par Mach (1). Mais quand on lit ses raisonnements, on se rappelle involontairement que Comte aussi, en examinant la Géométrie de Descartes, voyait son importance dans le fait d'épargne cérébrale que nous venons de signaler : « instituant une meilleure économie de nos forces spéculatives, » dit-il textuellement (*Traité élémen. de Géométrie analytique*, p. 3.)

IV

Une fois que les lois mathématiques des phénomènes ont été exprimées à l'aide des fonctions analytiques, le reste est simplement l'affaire des mathématiques pures ou abstraites, qui comprennent les opérations les plus ordinaires des nombres comme les combinaisons les plus compliquées de l'Analyse transcendante, Les équations que nous donne l'étude du phénomène dans la partie concrète des recherches mathématiques deviennent le point de départ des mathématiques pures. Ainsi, d'après l'ordre logique, la Mathématique abstraite suit la concrète, de même que dans le développement historique des mathématiques, les progrès de la partie concrète des mathématiques ont assuré ceux de la partie abstraite. En développant et démontrant cette dépendance logique et historique, Comte voyait clairement, du même coup, que les mathématiques abstraites forment par elles-mêmes une branche du savoir pleinement indépendante, et que leur étude doit pré-

---

(1) MACH. *Prinzipien der Wärmelehre*, 1896, p. 396. V. aussi le beau discours de Zurich de M. Poincaré.