IV

des analogies qui existent entre les différentes parties de la Physique est devenue de toute importance pour l'étude des phénomènes physiques; elle a eu de l'influence sur la nature des théories physiques et l'importance des formules mathématiques. Nous avons rompu avec la mythologie mécanique et, comme le dit Mach : les formules mathématiques ne sont pas considérées comme des lois qui gouvernent le monde, mais comme les descriptions les plus concises des phénomènes, par conséquent les plus économiques.

Le côté économique de la pensée scientifique, bien prononcé dans les Mathématiques, est parfaitement expliqué par Mach [1]. Mais quand on lit ses raisonnements, on se rappelle involontairement que Comte aussi, en examinant la Géométrie de Descartes, voyait son importance dans le fait d'épargne cérébrale que nous venons de signaler : « instituant une meilleure économie de nos forces spéculatives, » dit-il textuellement (*Traité élémen. de Géométrie analytique*, p. 3.)

IV

Une fois que les lois mathématiques des phénomènes ont été exprimées à l'aide des fonctions analytiques, le reste est simplement l'affaire des mathématiques pures ou abstraites, qui comprennent les opérations les plus ordinaires des nombres comme les combinaisons les plus compliquées de l'Analyse transcendante, Les équations que nous donne l'étude du phénomène dans la partie concrète des recherches mathématiques deviennent le point de départ des mathématiques pures. Ainsi, d'après l'ordre logique, la Mathématique abstraite suit la concrète, de même que dans le développement historique des mathématiques, les progrès de la partie concrète des mathématiques ont assuré ceux de la partie abstraite. En développant et démontrant cette dépendance logique et historique, Comte voyait clairement, du même coup, que les mathématiques abstraites forment par elles-mêmes une branche du savoir pleinement indépendante, et que leur étude doit pré-

(1) MACH. *Prinzipien der Wärmelehre*, 1896, p. 396. V. aussi le beau discours de Zurich de M. Poincaré.

céder l'étude philosophique de la Géométrie et de la Mécanique. Il insiste sur le fait que les mathématiques pures peuvent et doivent être exposées en un système unique et discontinu, indépendant de toutes combinaisons géométriques ou mécaniques. Il est certain que les méthodes supérieures de l'Analyse infinitésimale ont été inventées pour la solution des questions géométriques et mécaniques, et, comme conséquence, elles ont refléchi l'influence des combinaisons géométriques et mécaniques. Le calcul des fluxions de Newton est fondé sur l'examen d'une courbe décrite par un point matériel qui se meut, d'après la loi de l'accélération. Les combinaisons géométriques ont de l'influence sur les méthodes des infinitésimaux de Leibniz. L'illustre Lagrange a fait le premier la tentative d'exposer l'Analyse à un autre point de vue. Dans sa : « Théorie des fonctions analytiques » et ses « Leçons sur le calcul des fonctions » il détermine la dérivée comme le coefficient du premier degré de l'accroissement h dans le développement de la fonction $f(x+h)$, et de cette manière il fonde toute l'Analyse sur la théorie du développement des fonctions en séries. En examinant dans la sixième leçon l'Analyse des infinitésimaux à tous les points de vue, Comte prend le parti de Lagrange et considère son point de vue comme « le plus rationnel et le plus philosophique ». « Écartant avec soin toute considération hétérogène, Lagrange a réduit l'Analyse transcendante à son véritable caractère propre, celui d'offrir une classe très étendue de transformations analytiques... En même temps, cette Analyse est nécessairement présentée par là comme une simple extension de l'Analyse ordinaire ; elle n'a plus été qu'une Algèbre supérieure. Toutes les diverses parties, jusqu'alors si incohérentes, de la Mathématique abstraite, ont pu être conçues, dès ce moment, comme formant un système unique. » (1)

Pendant les soixante-dix années qui se sont écoulées depuis que Comte a écrit ces lignes, la tendance dominante chez les mathématiciens a été de donner de l'unité aux mathématiques pures et d'en bannir toutes les combinaisons prises dans d'autres sciences, surtout en Géométrie. Un mathématicien qui se rangea aux idées de Lagrange, en voulant fonder la théorie des fonctions

(1) *Cours de phil. posit.*, t. I, p. 268.

sur la théorie des séries de puissances, fut Weierstrass. Il manque en effet à la théorie de Lagrange l'ensemble et la précision ; car il examinait seulement les séries développées d'après les puissances de la variable réelle, et ne faisait aucune attention aux lois de convergence. Pour Weierstrass, la base de la théorie des fonctions est aussi une série de puissances, mais une série développée d'après les puissances de la variable complexe, et convergente dans un certain « cercle de convergence ».

Le principe de « la continuation analytique » nous permet d'observer la marche d'une fonction en dehors du cercle primordial de convergence ; et de cette façon toute la théorie des fonctions devient le résultat de la théorie des séries ; parcillement à cette dernière, elle est fondée sur des bases solides et purement arithmétiques ([1]). La théorie des nombres incommensurables est fondée par Weierstrass et d'autres mathématiciens sur de semblables bases arithmétiques, indépendantes de l'évidence des combinaisons géométriques. Le plus important à ce point de vue fut Kronecker, qui voulait réduire toutes les Mathématiques aux opérations des nombres entiers. C'est dans l'arithmétisation des mathématiques et dans la tendance à rendre toutes les démonstrations des théorèmes de l'Analyse exclusivement arithmétiques, que nous trouvons les particularités caractéristiques des mathématiques contemporaines ([2]). Les vérités, qui semblaient auparavant être démontrées d'après l'évidence géométrique, comme par exemple l'existence d'une dérivée de toute fonction continue, sont reconnues aujourd'hui comme admettant des exceptions. Je ne puis m'empêcher de rappeler, à ce sujet, que Lobatchevsky a devancé ses contemporains dans la solution de la question, relativement à la différentiation et à la discontinuité.

En se plaçant au point de vue de Lagrange et en ne voyant dans l'Analyse transcendante que la suite de l'Algèbre ordinaire, Comte présente le système de la pure Mathématique de la manière suivante. D'un côté les équations entre les nombres exprimés à l'aide d'éléments analytiques (fonctions abstraites),

---

([1]) V. H. Poincaré : *L'œuvre mathématique de Weierstrass* (Acta mathem. XXII, 1898) et notre article : « Weierstrass et la Mathématique contemporaine ». (*Bull. de la Soc. physico-mathématique de Kasan*. Série I, V. 4, 1886.)

([2]) F. Klein. *Arithméetisation des mathématiques* (Nouv. Ann. de Mathém., 1897.)

équations qui proviennent de la solution de chaque question concrète, doivent être tranformées pour démontrer plus précisément de quelle manière les quantités inconnues sont composées à l'aide des quantités connues ; de l'autre, après que les transformations ont conduit aux formules les plus simples et les plus élégantes, il est nécessaire de trouver des nombres inconnus. Conformément à ces deux problèmes, l'Analyse se divise en deux parties : l'Algèbre ou le Calcul des fonctions et l'Arithmétique ou le Calcul des quantités (nombres). Comte rapporte à l'Arithmétique beaucoup de questions qu'on ne lui attribue pas d'ordinaire, comme la construction des Tables logarithmiques et trigonométriques, la résolution numérique des équations, l'interpolation, l'intégration approximative, etc.

L'Algèbre ou le Calcul des fonctions se divise à son tour en deux parties : le Calcul des fonctions directes (Analyse ordinaire ou Algèbre proprement dite) et Calcul des fonctions indirectes (Analyse transcendante). La première partie a pour but la transformation immédiate et la résolution des équations formées entre les quantités examinées ; la seconde s'occupe des quantités auxiliaires ordinairement liées à celles qu'on examine dans la question et qu'on introduit pour faciliter l'opération. Telles sont les différentielles, dérivées, ou fluxions, selon que nous prenons tel ou tel des trois points de vue sur l'Analyse transcendante. Enfin l'Analyse transcendante se divise en deux parties, selon qu'elle a pour but la déduction des équations entre les quantités corrélatives dérivantes (Calcul différentiel, Calcul des fonctions dérivées, des fluxions) ou le problème inverse (Calcul intégral, Calcul des fonctions dérivantes, Calcul des fluentes). La septième leçon du cours de Comte est consacrée à l'explication des relations entre ces deux problèmes ; la fin de son exposé du système des mathématiques pures est entièrement consacrée au Calcul des variations (huitième leçon) et au calcul des différences finies (neuvième leçon).

J'ai ainsi terminé l'exposé des idées d'Auguste Comte sur la Philosophie des mathématiques, et je considère que mon but est atteint, si cet exposé persuade le lecteur, que les idées de Comte sur la relation entre les mathématiques pures ou abstraites et les mathématiques appliquées ou concrètes, sur la Géométrie considérée comme science naturelle, et sa conviction qu'il faut atteindre l'unité parfaite de l'Analyse, se confirment et s'expliquent par tous les progrès des mathématiques pendant les soixante-dix années écoulées depuis l'apparition du premier volume de la Philosophie positive.

Les progrès de la Physique mathématique ont mis beaucoup de branches des mathématiques concrètes au même rang que la Thermologie que Comte a si chaudement accueillie ; et Maxwell, auquel nous devons la création de la théorie électro-magnétique de la lumière, s'exprime dans les termes suivants, conformes aux idées de Comte : « toutes les applications des mathématiques à la Philosophie naturelle sont basées sur les relations entre les lois des quantités physiques et les lois des nombres, de même que l'aspiration fondamentale des sciences précises est la réduction des problèmes de la nature à la détermination des quantités, à l'aide des opérations sur les nombres. » (1)

Le mouvement scientifique et philosophique en Géométrie, étroitement lié au nom (inoubliable pour nous) de Lobatchevsky, donne l'explication des relations qui existent entre deux sciences naturelles, la Géométrie et la Mécanique, et la solution du problème discuté par Comte, à savoir : séparer dans les notions fondamentales de ces sciences « le physique et le logique ». (2) L'arithmétisation des mathématiques a pour but de créer l'unité parfaite des mathématiques pures.

En étudiant les œuvres d'Auguste Comte, on comprend pourquoi son nom occupera toujours une place importante dans l'histoire de la Philosophie des mathématiques, bien qu'il n'ait jamais eu les succès brillants que Sturm, par exemple, a remportés dans l'Analyse mathématique. En tout cas, le mathématicien qui lira le premier volume de la Philosophie positive aura beaucoup à gagner au contact des idées qui y sont exprimées ; il gagnera plus encore en s'assimilant cet esprit d'admiration pour la méthode mathématique, qui caractérise le livre entier de Comte. D'après ce dernier, cette méthode est la manifestation la plus brillante de l' « esprit positif. »

A. Vassilief (Kazan).

---

(1) *On Faraday's lines of force. Scientific papers*, Cambr., 1890 ; vol. I, p. 156.

(2) *Cours de phil. posit.*, t. I, p. 541.