SPHÈRE ET ELLIPSOIDE SPHÈRES CONNCENTRIQUES ET ELLIPSOIDES CONCENTRIQUES HOMOTHÉTIQUES

Autor(en): **Kilbinger**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3564

dérivées, paradoxe qui n'en est un que pour des élèves déjà forts, alors que les commençants s'étonnent qu'on ne leur démontre pas l'existence de la dérivée.

Le simple bon sens nous défend de définir le point comme ce qui dans l'espace peut être déterminé par trois nombres, et c'est cependant là la seule définition qui rend compte de toutes les difficultés que l'on rencontre en Géométrie. Je regrette, pour ma part, que l'enseignement de la Géométrie analytique ne se fasse pas en partant de ce point de vue si clair et si fécond ; mais il est bien évident que l'esprit d'un commençant se révolterait si de prime abord on se plaçait sur un pareil terrain, il veut, en effet, reconnaître dans les définitions des mots point, ligne, surface, l'image qu'il s'est faite des choses représentées par ces mots qui lui sont familiers. H. LAURENT (Paris).

SPHÈRE ET ELLIPSOIDE

SPHÈRES CONCENTRIQUES ET ELLIPSOIDES CONCENTRIQUES HOMOTHÉTIQUES (1)

Dans une note précédente (2) nous avons fait voir comment on peut dériver des théorèmes sur l'ellipse et sur des ellipses concentriques homothétiques des théorèmes correspondants du cercle et des cercles concentriques, quand les cercles et les ellipses sont en affinité. Le présent travail contient une étude analogue sur la sphère et l'ellipsoïde, ainsi que sur les sphères concentriques et les ellipsoides concentriques homothétiques. Pour entrer en matière, nous allons rappeler quelques propositions sur les systèmes alliés de l'espace.

Si deux systèmes de l'espace Σ et Σ_1 sont alliés, ou en affinité,

---

(1) REYE, *Geometrie der Lage*, 2. Abthlg ; 3. Auflage, Vortrag 8 ; 3. Abthlg ; 3. Auflage, Vortrag 5.

(2) « Cercle et ellipse », etc. *L'Enseignement math.*, 1re année, 1899, p. 452.

leurs plans à l'infini se correspondent l'un à l'autre. Comme, d'après cela, toute droite à l'infini dans Σ a pour correspondante une droite à l'infini dans Σ_1, deux systèmes plans homologues dans Σ et Σ_1 sont aussi en affinité ; et de même, deux ponctuelles homologues de Σ et Σ_1 sont projectives semblables. Il s'ensuit que non seulement les points milieux de deux segments rectilignes homologues de Σ et Σ_1 sont des points homologues, mais encore qu'à deux segments égaux quelconques d'une droite dans Σ correspondent deux segments égaux sur la droite homologue dans Σ_1. A des lignes et des plans parallèles correspondent des lignes et des plans parallèles. A tout parallélogramme de Σ doit donc correspondre un parallélogramme de Σ_1 et à tout parallélipipède un parallélipipède.

Deux solides quelconques de Σ sont entre eux dans le même rapport que les solides homologues de Σ_1, et, par suite, quand deux solides de Σ sont égaux, il en est de même des solides homologues de Σ_1.

Supposons dans les deux systèmes alliés Σ et Σ_1 deux surfaces homologues quelconques. Comme tout système de cordes parallèles dans l'une des surfaces a pour correspondant un système de cordes parallèles dans l'autre et que tout point milieu d'une corde correspond au point milieu de la corde homologue, il en résulte que dans deux surfaces alliées du second ordre, un plan diamétral correspond à un plan diamétral et deux diamètres conjugués ou un plan diamétral et son diamètre conjugué correspondent respectivement à deux diamètres conjugués ou à un plan diamétral et son diamètre conjugué.

Une sphère quelconque peut être alliée à un ellipsoïde, et les deux surfaces peuvent être regardées comme surfaces homologues des systèmes alliés de l'espace. Soient donnés la sphère $\varkappa$ et l'ellipsoïde $\varkappa_1$, et supposons qu'ils se correspondent dans les systèmes alliés de l'espace Σ et Σ_1 ; alors il sera facile de déduire, comme auparavant, des théorèmes connus de la sphère les théorèmes correspondants sur l'ellipsoïde.

Nous établissons les relations suivantes :

Trois diamètres conjugués d'une sphère étant perpendiculaires entre eux, tous les parallélépipèdes dont les faces sont tangentes à la sphère $\varkappa$ aux extrémités de trois diamètres conjugués quelconques sont des cubes ayant tous le même volume $8r^3$, r étant le rayon de la sphère $\varkappa$. Le volume du cube circonscrit est donc avec celui de la sphère dans le rapport de $8r^3 : \frac{4\pi}{3} r^3$ ou $8 : \frac{4\pi}{3}$. De là on déduit pour l'ellipsoïde $\varkappa_1$ ce qui suit :

« Tous les parallélépipèdes, dont les faces sont tangentes à « l'ellipsoïde $\varkappa_1$ aux extrémités de trois diamètres conjugués « quelconques ont le même volume $8\,abc$, en désignant par $2a$, « $2b$, $2c$ les segments interceptés par la surface sur ses trois axes. »

Comme dans les systèmes Σ et Σ_1 les corps ou solides homologues sont en proportion, nous concluons de ce qui précède, en désignant par V le volume de l'ellipsoïde $\varkappa_1$:

$$\frac{4\pi}{3} r^3 : 8r^3 = V : 8\,abc,$$

donc :

$$V = \frac{4\pi}{3}\,abc.$$

La sphère $\varkappa$ étant divisée en huit parties équivalentes par trois plans diamétraux conjugués, il en est de même de l'ellipsoïde $\varkappa_1$.

Les points milieux de toutes les cordes de la sphère $\varkappa$ qui passent par un seul et même point, sont situés sur une sphère ξ; la droite qui joint ce point au centre de la sphère $\varkappa$ est aussi un diamètre de la sphère ξ. De là nous concluons que :

« Les points milieux de toutes les cordes de l'ellipsoïde $\varkappa_1$ qui « passent par un seul et même point, sont situés sur un ellipsoïde ξ_1 (1); la droite qui joint ce point au centre de l'ellipsoïde $\varkappa_1$ passe aussi par le centre de l'ellipsoïde ξ_1. »

Nous rendrons notre discussion sur la sphère et l'ellipsoïde plus intéressante encore en considérant des sphères concentriques et des ellipsoïdes concentriques homothétiques.

Supposons de nouveau, comme précédemment, que la sphère $\varkappa$ et l'ellipsoïde $\varkappa_1$ soient des surfaces homologues dans les deux systèmes alliés de l'espace Σ et Σ_1. Prenons maintenant une seconde sphère ξ concentrique à la première, et nous aurons comme surface homologue du système Σ_1, un ellipsoide ξ_1, con-

(1) L'ellipsoïde ξ_1 ne saurait être une sphère, les systèmes Σ et Σ_1 n'étant point semblables, mais seulement alliés.

centrique à l'ellipsoïde $\varkappa_1$. Deux diamètres conjugués quelconques d'une sphère étant perpendiculaires entre eux, les sphères $\varkappa$ et ξ ont en commun la même gerbe polaire des diamètres ; il en est de même des ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ξ_1, et par conséquent les axes de $\varkappa_1$ et de ξ_1 coïncident; $\varkappa_1$ et ξ_1 sont appelés « ellipsoïdes concentriques homothétiques ».

En plaçant, dans ce qui suit, les propositions correspondantes l'une en regard de l'autre, nous concluons :

DES THÉORÈMES A GAUCHE :

a) Les sphères $\varkappa$ et ζ sont rencontrées par tout plan sécant s en deux cercles concentriques g et l.

b) Les points milieux d'une gerbe de cordes parallèles de $\varkappa$ et ζ sont tous situés sur un plan diamétral commun.

c) Les centres des couples de circonférences concentriques déterminées sur les sphères $\varkappa$ et ζ par un faisceau de plans sécants parallèles, sont tous situés sur un diamètre commun des deux sphères.

d) Les quatre plans tangents construits aux extrémités d'un diamètre commun aux deux sphères $\varkappa$ et ζ sont perpendiculaires à ce diamètre et par conséquent parallèles entre eux.

e) Menons par le centre O de $\varkappa$ deux droites qui coupent $\varkappa$ aux points A, B et ζ aux points C, D ; alors les triangles OAB et OCD sont semblables, et par conséquent AB est parallèle à CD.

LES THÉORÈMES A DROITE :

a_1) Les ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ζ_1 sont rencontrés par tout plan sécant s_1 en deux ellipses g_1 et l_1 qui sont concentriques homothétiques comme étant alliées aux circonférences concentriques g et l.

b_1) Les points milieux d'une gerbe de cordes parallèles de $\varkappa_1$ et ζ_1 sont tous situés sur un plan diamétral commun.

c_1) Les centres des couples d'ellipses concentriques homothétiques déterminées sur les ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ζ_1 par un faisceau de plans sécants parallèles, sont tous situés sur un diamètre commun des deux ellipsoïdes.

d_1) Les quatre plans tangents construits aux extrémités d'un diamètre quelconque de $\varkappa_1$ et ζ_1 sont parallèles entre eux.

e_1) Soient O_1, A_1, B_1, C_1 et D_1 les points correspondants dans Σ_1, il résulte de *e*) que AB est parallèle à CD, et à cause de la similitude des triangles $O_1A_1B_1$ et $O_1C_1D_1$ nous avons la proportion :

$$O_1A_1 : O_1C_1 = O_1B_1 : O_1D_1$$

Donc :

Les rayons des ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ζ_1 sont coupés par les surfaces en parties proportionnelles.

f) Les pôles d'un plan quelconque π par rapport aux deux sphères $\varkappa$ et ζ sont situés sur le diamètre perpendiculaire et conjugué à ce plan.	f_1) Les pôles d'un plan quelconque π_1 par rapport aux deux ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ζ_1 sont situés sur le diamètre conjugué à ce plan.
g) Les plans polaires d'un point P par rapport aux deux sphères $\varkappa$ et ζ sont perpendiculaires au diamètre qui passe par le point P et par conséquent parallèles entre eux.	g_1) Les plans polaires d'un point P_1 par rapport aux deux ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ζ_1 sont parallèles entre eux.
h) Les quatre plans polaires de deux points quelconques par rapport à $\varkappa, \zeta$ se coupent suivant quatre droites parallèles.	h_1) Les quatre plans polaires de deux points quelconques par rapport à $\varkappa_1$, ζ_1 se coupent suivant quatre droites parallèles.

Supposons maintenant dans le système Σ tout le faisceau des sphères concentriques à la sphère $\varkappa$, et nous aurons pour correspondant dans le système allié Σ_1 un « faisceau d'ellipsoïdes concentriques homothétiques ».

D'après ce qui précède, nous sommes en état maintenant d'énoncer le résultat général que voici :

« Les ellipsoïdes d'un faisceau F d'ellipsoïdes concentriques « homothétiques ont la même gerbe polaire des diamètres et les « mêmes axes principaux. Le faisceau est déterminé par un seul « ellipsoïde. Le centre de cet ellipsoïde est le centre commun de « similitude. Nous obtiendrons un ellipsoïde concentrique homo- « thétique au premier en augmentant ou en diminuant ses rayons « dans un rapport donné. Par un point quelconque de l'espace on « peut faire passer un seul ellipsoïde du faisceau F. Tout plan « coupe le faisceau suivant des ellipses concentriques homothé- « tiques et est tangent à un ellipsoïde du faisceau au centre « commun des mêmes ellipses. Les centres des coniques déter- « minées sur les ellipsoïdes, par un système de plans sécants « parallèles sont tous situés sur un seul et même diamètre. Les « points milieux d'une gerbe de cordes parallèles sont tous « situés sur un seul et même plan diamétral. Les plans tangents « aux ellipsoïdes du faisceau F construits dans les extrémités « d'un diamètre, sont tous parallèles. Les pôles d'un plan quel- « conque par rapport aux ellipsoïdes du faisceau sont tous situés « sur un seul et même diamètre, et les plans polaires d'un point « quelconque forment un faisceau de plans parallèles. Les plans

« polaires de deux points quelconques par rapport aux ellip-
« soïdes du faisceau F se coupent suivant une gerbe de droites
« parallèles. »

Pour terminer, nous mentionnons encore les propositions suivantes :

« 1° Les sommets de tous les parallélipipèdes circonscrits à un
« ellipsoïde et dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde aux
« extrémités de trois diamètres conjugués quelconques sont tous
« situés sur un ellipsoïde concentrique homothétique au premier. »

« 2° Les sommets de tous les cônes circonscrits à un ellipsoïde
« qui limitent avec les plans de leurs ellipses de contact des
« solides de volume donné, sont tous situés sur un second ellip-
« soïde, concentrique, homothétique au premier. » (Reye.)

Pour démontrer ces deux propositions, nous n'avons qu'à allier les ellipsoïdes à des sphères. Dans le premier cas nous trouverons comme lieu des sommets des cubes correspondant aux parallélépipèdes, une sphère concentrique à la première ; et de même les sommets des cônes circonscrits à la sphère correspondant aux cônes circonscrits à l'ellipsoïde sont situés sur une sphère concentrique à la première.

Dr Kilbinger (Mulhouse).

SUR LA DÉMONSTRATION

DES FORMULES DU DEMI-ANGLE

EN TRIGONOMÉTRIE PLANE

Le théorème de Carnot résout en principe le problème fondamental de la Trigonométrie, qui consiste à déterminer les angles d'un triangle dont on connaît les trois côtés. Toutefois la formule obtenue ne se prête guère au calcul logarithmique ; aussi en déduit-on d'ordinaire les formules dites du demi-angle, en ayant recours à des transformations algébriques.