SUR LA DEMONSTRATION DES FORMULES DU DEMI-ANGLE EN TRIGONOMÉTRIE PLANE

Autor(en): **Redl, Frz.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3565

« polaires de deux points quelconques par rapport aux ellip-
« soïdes du faisceau F se coupent suivant une gerbe de droites
« parallèles. »

Pour terminer, nous mentionnons encore les propositions suivantes :

« 1° Les sommets de tous les parallélipipèdes circonscrits à un
« ellipsoïde et dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde aux
« extrémités de trois diamètres conjugués quelconques sont tous
« situés sur un ellipsoïde concentrique homothétique au premier. »

« 2° Les sommets de tous les cônes circonscrits à un ellipsoïde
« qui limitent avec les plans de leurs ellipses de contact des
« solides de volume donné, sont tous situés sur un second ellip-
« soïde, concentrique, homothétique au premier. » (Reye.)

Pour démontrer ces deux propositions, nous n'avons qu'à allier les ellipsoïdes à des sphères. Dans le premier cas nous trouverons comme lieu des sommets des cubes correspondant aux parallélépipèdes, une sphère concentrique à la première ; et de même les sommets des cônes circonscrits à la sphère correspondant aux cônes circonscrits à l'ellipsoïde sont situés sur une sphère concentrique à la première.

Dr Kilbinger (Mulhouse).

SUR LA DÉMONSTRATION

DES FORMULES DU DEMI-ANGLE

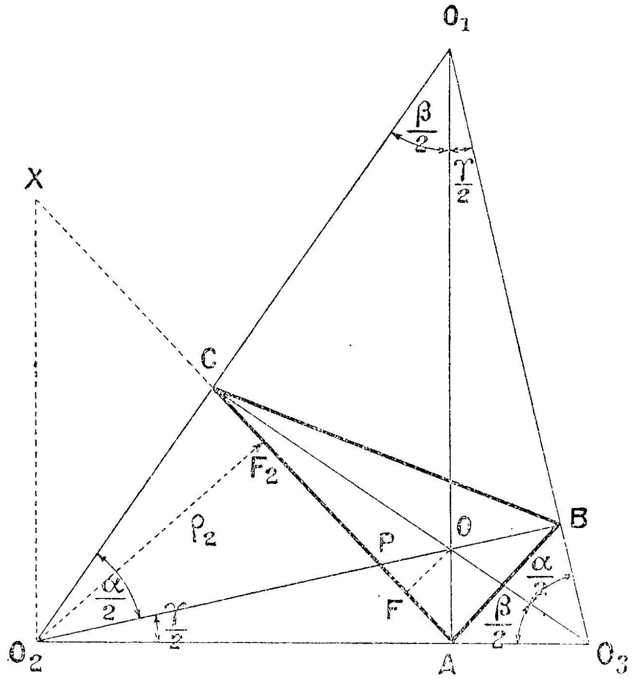
EN TRIGONOMÉTRIE PLANE

Le théorème de Carnot résout en principe le problème fondamental de la Trigonométrie, qui consiste à déterminer les angles d'un triangle dont on connaît les trois côtés. Toutefois la formule obtenue ne se prête guère au calcul logarithmique ; aussi en déduit-on d'ordinaire les formules dites du demi-angle, en ayant recours à des transformations algébriques.

C'est, je crois, à M. Fred. Meyer, professeur au Gymnase de Halle, qu'on doit le premier essai (1) d'arriver directement à ces dernières formules, par des considérations purement géométriques.

Un peu plus tard M. Korschel donna (2) une démonstration analogue à celle de M. Meyer.

La méthode que je me propose d'exposer ici et qui conduit aux formules du demi-angle par une voie purement géométrique,



me semble plus importante que celle de Meyer, tant au point de vue pédagogique, qu'au point de vue scientifique. En effet, elle n'exige aucun théorème auxiliaire ; la démonstration est absolument analogue pour les trois formules et, correspondant ainsi à leurs constructions, met bien en lumière leur étroite parenté ; la figure sur laquelle elle se base a une grande importance géométrique, puisque le triangle ABC est précisément le triangle ayant pour sommets les pieds des hauteurs du triangle $O_1 O_2 O_3$; enfin, par cette méthode il est toujours facile de retrouver la démonstration de l'une quelconque des formules. Mais, arrivons au fait.

Menons les bissectrices tant intérieures qu'extérieures du triangle donné ABC (voir la figure); soit AO_1, BO_2 et CO_3 les

(1) Voir sa note publiée dans la *Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht*, année 1887, p. 265 et 266.

(2) *Œsterr. Zeitschrift für das Realschulwesen*, année 1893, p. 460, 461.

trois bissectrices intérieures, O_2O_3. O_3O_1 et O_1O_2 les trois bissectrices extérieures, soient encore $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\lambda}{2}$ les demi-angles du triangle ABC.

1. Pour trouver la valeur de $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, il suffit de comparer les deux triangles semblables OCO_2 et OBO_3 ; le premier nous donne $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{OC}{OO_2}$, et le deuxième $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{OB}{OO_3}$; on en déduit, en multipliant membre à membre :

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{OC. \ OB}{OO_2 \ OO_3} = \frac{OC}{OO_3} \cdot \frac{OB}{OO_2}.$$

Si, d'autre part, on projette les points O et O_3 sur l'un des côtés CB ou CA, on voit que

$$\frac{OC}{OO_3} = \frac{(s-c)}{c}$$

en désignant par *s* le demi-périmètre du triangle ; de même si l'on projette les points O et O_2 sur l'un des côtés BA ou BC, on voit que

$$\frac{OB}{OO_2} = \frac{(s-b)}{b}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, on a enfin :

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b) \quad (s-c)}{b. \qquad c}.$$

2. En employant les triangles OCO_2 et O_1BO_2, on arrivera d'une façon analogue à la formule de $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

On a, en effet, dans le triangle OCO_2 :

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{O_2C}{O_2O}$$

et dans le triangle O_1BO_2 :

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{O_2B}{O_2O_1}$$

d'où, par multiplication :

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{O_2C}{O_2O} \cdot \frac{O_2B}{O_2O_1} = \frac{O_2C}{O_2O_1} \cdot \frac{O_2B}{O_2O}.$$

Projetant les points O_1 et O_2 sur CB ou CA, les points O et O_2 sur BC ou BA, on trouve :

$$\frac{O_2C}{O_2O_1} = \frac{(s-a)}{c} \text{ et } \frac{O_2B}{O_2O} = \frac{s}{b},$$

ce qui donne la formule cherchée :

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{s\,(s-a)}{b.\,c.}.$$

3. Enfin, pour trouver $\operatorname{tg}\frac{2\alpha}{2}$, il suffit de considérer les triangles OCO_2 et O_1CO_3, qui nous donnent :

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{OC.\ O_1C}{O_2C.\ O_3C} = \frac{OC\ \ O_1C}{O_3C\ \ O_2C};$$

mais

$$\frac{OC}{O_3C} = \frac{(s-c)}{s}, \text{ et } \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{(s-b)}{(s-a)}$$

ainsi qu'on le reconnaît aisément par projection ; d'où il suit

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)\,(s-c)}{s.\,(s-a)}.$$

On obtiendrait plus rapidement cette dernière formule en formant le quotient $\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, mais je tenais tout d'abord à montrer la généralité de la méthode, en l'appliquant aussi à ce cas, et à indiquer ensuite un nouveau moyen de déterminer ρ ; il suffit, en effet, pour l'obtenir de remplacer dans la dernière formule $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ par $\frac{\rho}{(s-a)}$.

Reste maintenant à exposer brièvement que cette méthode fournit un moyen mémnotechnique pour retrouver ces formules ; il repose sur la définition même des fonctions trigonométriques. Par exemple : pour trouver le second triangle qui, avec OCO_2, nous donnera la démonstration de la formule du $\sin\frac{\alpha}{2}$, on prolonge dans le triangle OCO_2, le côté opposé à $\frac{\alpha}{2}$ et l'hypoténuse, et l'on obtient le triangle OBO_3. Pour $\cos\frac{\alpha}{2}$, on prolongerait le côté adjacent à $\frac{\alpha}{2}$ et l'hypoténuse et pour $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, les deux côtés de l'angle droit.

Bien que ce qui suit n'appartienne plus, à vrai dire, à mon sujet, le lecteur me permettra d'indiquer, en terminant, une méthode nouvelle, à ce que je crois, pour déterminer le rayon du cercle ex-inscrit au triangle donné ABC. Calculons, par exemple, le rayon ρ_2 du cercle de centre O_2.

Menons O_2X parallèle à AO_1 ; on voit alors que

$$\rho_2^2 = (s-c).\ \overline{F_2X}.$$

On obtiendra $\overline{F_2X}$ en remarquant que les triangles semblables OFA et O_2F_2X sont homothétiques, et ont pour centre d'homothétie P et pour rapport d'homothétie $\frac{\rho}{\rho_2} = \frac{(s-b)}{s}$; le côté $\overline{F_2X}$ est donc l'homologue de $\overline{FA}$, et comme ce dernier égale lui-même $(s-a)$, on a

$$F_2X = (s-a)\frac{s}{(s-b)}$$

d'où finalement

$$\rho^2_2 = \frac{s\,(s-a)\ (s-c)}{(s-b)}.$$

Frz. Redl (Viehofen, Basse-Autriche).

NOTION DE L'INFINI

EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

A PROPOS D'UN ARTICLE DE M. RIPERT [1]

La Géométrie élémentaire a heureusement échappé jusqu'ici aux innovations qui, sous couleur de progrès scientifique, ont entraîné les mathématiques spéciales dans une voie dangereuse. Aussi suis-je bien loin de partager l'opinion de M. Ripert sur l'introduction, dans la Géométrie élémentaire, de l'infini, au sens que M. Ripert donne à ce mot.

[1] Voir n° 2, 2e année, de l'*Enseignement mathématique* (15 mars 1900).