

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1901)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REFLEXIONS SUR L'EXPOSITION DES PRINCIPES DE LA
MÉCANIQUE RATIONNELLE
Autor: Maggi, G.-A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-4654>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 10.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

RÉFLEXIONS

SUR L'EXPOSITION DES PRINCIPES

DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE

Ces problèmes ne sont pas ni tout à fait la même chose que les problèmes physiques ni toute autre chose non plus : ils tiennent en même temps des spéculations mathématiques et physiques ; en effet, ceci se comprend par les premières, cela par les secondes.

(ARISTOTE. *Problèmes mécaniques.*)

Introduction. — Les notions de la Masse et de la Force dans les « Principes » de Newton : cette notion vise la conception de la Force comme une propriété du mouvement. — Conception statique de la Force : raison de son succès ; source de ses critiques. — Procédés d'exposition de la Mécanique rationnelle abandonnant la trace de Newton. — Le procédé de Kirchhoff : objections à sa définition de la Mécanique rationnelle et à ses conceptions de la Masse et de la Force. — Le procédé de Hertz : objections à sa définition de la Masse, et à sa loi fondamentale d'où découle la notion de la Force. — Notre ordre d'idées. — La Mécanique rationnelle est, de même que la Géométrie, le résultat de l'idéalisation d'une science physique : elle est une continuation de la Géométrie ; nouvelle définition de son rôle. — La question de la notion absolue du temps, de la position et de la matière écartée. — Définition de la Masse, suivant Mach ; la Masse envisagée comme une propriété analogue à l'équivalent chimique. — Comparaison de nos postulats avec les « *Leges motus* » de Newton ; ils se réduisent en substance à la Lex II et III ; perfectionnement de la loi de l'action et de la réaction, suivant Clifford ; le mouvement d'un corps isolé (Lex I) se réduit à celui d'une couple de corps. — Nous considérons des figures finies, et non pas des « points matériels ». — La « figure matérielle » ; procédé par lequel nous en déduisons le « corps naturel » ; notion de l'« accélération moyenne » et de la « densité ». — Objections à la conception du « point matériel » ; nous le réduisons à une locution abrégée ; notion de la « force élémentaire. » — Définition de la « force motrice » ; l'action mutuelle des corps est une propriété de leur mouvement, tirée de l'expérience : la force motrice est une mesure de cette action, signalée par des propriétés remarquables. — Qu'est-ce qu'il faut entendre par « mobile fictif ». — Division de la Mécanique rationnelle en deux sections : « Propriétés générales du Mouvement » et « Calcul du Mouvement ». — Nous envisageons les « liaisons » comme des propriétés du mouvement préalablement admises, et nous les

réserveons pour la deuxième section, de même que la « pression », à laquelle nous rattachons la « force accélératrice limite ». — Point de départ commun du calcul du mouvement des systèmes à liaisons et des corps continus. — Définition des « pressions de liaison » ; leur propriété caractéristique. — « Pressions préalablement données » et « Forces imprimées ». — Formation de l' « équation de d'Alembert et Lagrange » ; déduction des équations « pures » du mouvement. — Les « pressions de frottement » envisagées comme pressions préalablement données. — L'expérience juge de l'utilité du procédé suivi pour le calcul du mouvement. — Questions à résoudre pour le perfectionnement de l'exposition de la Mécanique rationnelle.

Quelque surprise que la discussion des fondements d'une science parvenue à un haut degré de perfection cause au premier abord, c'est son développement qui en est en lui-même une raison tout à fait naturelle. Le champ des applications s'élargissant de plus en plus, cet élargissement entraîne un accroissement de la portée des principes, qu'un esprit critique ne saurait accepter, sans vérifier s'ils en sont bien capables, et étudier, s'il le trouve nécessaire, les modifications qu'il faut apporter, à cet effet, aux notions par lesquelles ils ont été originairement posés. C'est de la sorte que ce dernier quart de siècle est signalé par de nombreux essais de réforme des fondements de la Mécanique rationnelle, après que ses méthodes eurent bénéficié du perfectionnement de l'Analyse infinitésimale, et que son domaine eut annexé, jusqu'à un certain point, les régions frontières de la Physique mathématique, par la découverte du principe de la conservation de l'énergie. Cette extension était une raison suffisante pour songer à dégager la notion de la force d'une image, laquelle, bien que même excessivement idéalisée, se rattachait directement à la pression d'une tige et à la traction d'une corde tendue, et la notion de la masse de sa représentation par le poids : tandis que le progrès de l'Analyse ayant exclu l'ancien indivisible, on ne pouvait se passer de revenir sur la conception du point matériel.

J'ai essayé, moi-même, de composer un traité, avec des idées en partie nouvelles, en partie inspirées aux ouvrages récemment parus ⁽¹⁾. Ce sont ces mêmes idées, avec quelque perfectionne-

(1) *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi*. Milano, 1896.

Voyez : *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. XX.

Zeitschrift für Mathematik und Physik., t. XLII (Lüroth).

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche, Anno I (Vivanti).

ment que mon enseignement dans l'Université de Pise m'a permis d'y apporter, qui forment l'objet de la courte étude critique qui suit. Elles s'y trouvent développées, et comparées, en une certaine mesure, avec les plus remarquables auxquelles j'ai cru parfois devoir les préférer. Je crois qu'elle présente quelque intérêt, d'autant plus que je n'ai fait place dans mon livre à aucune discussion ou comparaison, tâchant de faire ressortir du développement de la théorie les avantages que je supposais dans la méthode. Je pense d'avoir, en même temps, donné quelque éclaircissement nécessaire, et répondu à des objections, auxquelles cette absence d'explications ne pouvait manquer de donner occasion.

I

La Mécanique rationnelle, dans les « Principia » (1) de Newton, qu'on doit considérer comme la première exposition systématique de cette science, de même que dans les écrits de Galilée, où ses bases se trouvent posées, est également fondée sur le calcul et sur l'expérience.

C'est des « Principia » que découlent les notions, jouant toujours un rôle essentiel, de la Masse et de la Force : et, pour les établir, on n'y fait moins appel à l'expérience qu'on n'a recours au raisonnement.

La définition de la masse par laquelle l'ouvrage commence : « *Quantitas materiæ est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim* » (Definitio I) est suivie de la remarque que la masse d'un corps est révélée par le poids, et qu'il sera démontré plus tard qu'elle est proportionnelle à ce poids. Par cela il est bien évident que Newton juge qu'il soit indispensable d'avoir recours au phénomène familier du poids pour établir la notion de la masse, dont il identifie la mesure avec celle du poids. Remarquons que cette identification, demandée au début comme une concession provisoire, ne se trouvera pas justifiée à la place promise par un raisonnement parfaitement rigoureux. En effet nulle part la notion

(1) *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, 1687.

de « densitas » est mieux établie : autrement de « velocitas » jouant un rôle semblable dans la définition de la quantité de mouvement : « Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiæ conjunctim » (Definitio II), qui résulte la « prima vel ultima ratio » de l'espace au temps. Il s'ensuit que ce raisonnement implique un terme dont la signification n'a pas été précisée.

Quant à la Force, Newton distingue la « vis insita » se réduisant à l'inertie, et la « vis impressa » qu'il affirme provenir de différentes causes : la percussion, la pression, la force centripète. Pour cette dernière espèce de force la direction est celle de la droite joignant le point avec le centre, et la quantité (quantitas motrix) est expressément définie (Definitio VIII) comme la même qui va résulter en général d'après la Lex II : « Mutationem motus esse proportionalem vi impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur ». Par contre, point d'indication sur la façon de déterminer la direction et la quantité des autres espèces de force. D'où il apparaît que Newton remet à l'étude du mouvement la détermination de la force centripète, qui résultera, dans tous les cas qu'on rencontre en Nature, une fonction de la position des deux points, attirant et attiré ; tandis qu'il implique dans ses idées de percussion et de pression une quantité et une direction déterminées *a priori*. Cependant ses raisonnements ramènent chaque fois la « vis impressa » à la « mutatio motus » correspondante, ce qui revient à la concevoir comme déduite du mouvement correspondant.

D'ici découle tout spontanément l'idée de transférer à la « mutatio motus » les attributs de la « vis impressa » : c'est-à-dire de considérer, au lieu de la percussion et de la pression, les corps heurtant et heurté, comprimant et comprimé, et concevoir la « mutatio motus » (égale et de sens opposé suivant la Lex III) de chacun des deux corps déterminée par leur position et leur condition, de même que celles de deux points exerçant l'un sur l'autre une force centripète, suivant les lois que fournit l'observation des mouvements naturels. Cela revient en substance à éliminer la force et à y substituer la considération directe du mouvement : les attributs de la « mutatio motus » résultant des propriétés générales du mouvement, déduites à l'aide de l'obser-

vation. Nous pourrions toujours juger convenable, quand il s'agit d'un mouvement à causes complexes, de distinguer par un terme spécial la « mutatio motus » qu'une condition particulière déterminerait isolément, et ne représente en effet qu'une composante de l'effective. Nous garderons pour cela les expressions de « mutatio motus » redevable à une percussion, à une pression, à une force centripète, qui comptent parmi les causes du mouvement considéré. Ce terme alors ne jouera plus que le rôle de relever un point de vue particulier auquel on envisage la production du mouvement en question.

D'autre part, une École à laquelle d'éminents géomètres prêtent toujours leur appui a admis l'idée fondamentale de la force séparée du mouvement, et a tâché de la perfectionner pour arriver à déduire des attributs de la force, en partie censés évidents *a priori*, en partie admis par concession, les mêmes lois du mouvement, avec le résultat, parmi les autres, d'obtenir une définition de la masse. On peut citer la démonstration du parallélogramme des forces suivant la conception de Poisson comme un exemple de l'usage d'un tel principe, en même temps que comme une de ses plus belles applications ⁽¹⁾.

Ce principe tire son origine des écrits des géomètres grecs sur l'équilibre; il reste sans doute le plus convenable pour traiter la statique séparément, avec une conception plus bornée de la force, tirée de l'action d'une tige ou d'une corde tendue.

Cela explique en partie la faveur presque incontestée que les mécaniciens lui ont accordée jusqu'à nos jours. En effet, l'acquisition du théorème des vitesses virtuelles ayant rehaussé l'importance de la statique, et la découverte, qui suivit un quart de siècle après, du théorème de d'Alembert lui ayant en quelque sorte subordonné la cinétique, on s'arrêta désormais sur cette distribution de la Mécanique rationnelle en Statique et Dynamique (avec l'acceptation de traité du mouvement), la première étant posée comme fondement de la seconde, dont un modèle classique est la Mécanique analytique de Lagrange.

⁽¹⁾ Voyez les études récentes de M. F. SIACCI « *Sulla composizione delle forze nella Statica e sui principii della Meccanica* ». (*Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*, 1889.)

D'ailleurs, le progrès, dû en si grande partie à l'œuvre de Lagrange, des procédés de résolution des problèmes, entraîna, par l'annexion d'un domaine pertinent presque au même égard à l'Analyse mathématique et à la Mécanique rationnelle, une modification de la notion originaire de cette science. Ses liens avec la Mathématique pure s'étant multipliés et resserrés, s'affaiblirent ses rapports avec l'expérience. On jugea alors en harmonie avec le caractère mathématique de la science ce recours à l'intuition, auquel on a fait appel si longtemps pour établir les fondements de l'Analyse et de la Géométrie.

A son tour, la critique de la méthode en discours, forte d'une si noble et ancienne tradition, s'affirma dès que l'Analyse accueillit l'idée fondamentale de Weierstrass, qui réduit au nombre entier le domaine de l'intuition, et la Géométrie ce point de vue, remontant à Lobatschewsky, qui désigne l'expérience comme la source de ses hypothèses générales.

II

Considérer directement le mouvement, pour en déduire le fait et les modalités de la force, au lieu de construire *a priori* la force, pour en tirer les lois du mouvement, c'est un principe auquel sont inspirées même des méthodes qui s'écartent entièrement de la trace de Newton.

Kirchhoff nous présente, avec sa « *Mechanik* » (1877), le premier exemple d'un traité complet rompant tout à fait avec la tradition. Il y établit que l'objet de la Mécanique c'est de décrire les mouvements qui ont lieu en nature *complètement et de la façon la plus simple*. La Force et la Masse partant ne figureront plus qu'en tant qu'elles aident à atteindre ce but : et Kirchhoff affirme qu'on devra les déduire des notions d'espace, de temps et de matière. Quant à ce dernier mot, il n'envisage ce qui se meut comme de la matière, plutôt que comme du simple espace, que par ce qu'il se propose de se borner à décrire ces mouvements particuliers des figures qu'on observe dans les corps appelés « matériels ». D'après ce principe, aussitôt qu'on a reconnu l'usage de l'accélération pour la description du mouvement d'un point, on ne fait plus de

distinction essentielle entre elle et la « force accélératrice ». Lorsqu'on dit que la terre est attirée par le soleil avec une force dont l'intensité est inversement proportionnelle au carré de la distance, on décrit tout simplement le mouvement de la terre (conçue isolée avec le soleil) à l'aide de son accélération — d'une façon complète (quitte à ajouter la position et la vitesse à un instant donné) et la plus simple. On peut concevoir d'une infinité de manières, l'accélération d'un point comme la somme géométrique de plusieurs autres ; cette décomposition particulière de l'accélération d'un mouvement naturel à l'aide de laquelle la description du mouvement réussit la plus simple, restant toujours complète, représente, pour le mouvement en question, l'analyse naturelle de la force accélératrice par le « parallélogramme des forces ». Il en jaillit la représentation de la force accélératrice d'un corps céleste comme la somme géométrique de celles qu'il posséderait séparément isolé avec tous les autres. L'expression de ces forces résulte la même pour toutes, à moins d'un facteur de proportionnalité qu'on appellera la masse du corps auquel appartient la force partielle considérée. Pareillement, l'action d'une surface résistante sur un point se traduit en un terme de l'expression de la force accélératrice du point, dont l'opportunité des formules est censée suggérer la forme. Et lorsqu'on passe, de ce cas le plus simple, au cas d'un nombre quelconque de points, entre les coordonnées desquels existent des équations, c'est à la même opportunité que le rôle se trouve assigné de suggérer la généralisation de la formule précédente, et d'y introduire un coefficient pour chaque point de l'ensemble considéré, qu'on appellera la masse du point correspondant. Enfin c'est le même critérium qui préside à la formation de cette expression des six équations cardinales, correspondantes à une partie quelconque d'un corps continu, impliquant la pression à la surface, et formant le point de départ de la théorie du mouvement le plus général.

Or, il est parfaitement juste qu'il est réservé au parti que la description du mouvement tire d'une notion pertinente à la Mécanique de relever l'importance, et même la raison d'être, de cette notion. Mais on ne peut pas réduire, à mon avis, le jugement de ce parti à la plus grande simplicité, qu'il ne sera pas toujours

aisé d'apprécier, compatible avec la perfection. C'est présument la déduction de la force de pesanteur des lois de Galilée, et de la force newtonienne de gravitation universelle des lois de Kepler, qu'inspire ce principe de Kirchhoff. Mais est-ce tout simplement la simplicité de la description du mouvement qui forme l'objet de ces déductions ? Bien davantage, la connaissance de l'accélération nous habilitera à former les équations différentielles du mouvement d'un projectile dans un milieu résistant, et celles des trois corps — l'unique description de ces mouvements, qu'elle soit ou non censée la plus simple, que nous pouvons en donner directement. Cela en vertu de ces lois générales, tirées de l'expérience, que la méthode de Kirchhoff laisse dans l'ombre, au désavantage de la connexion et de la persuasivité du développement. C'est de ces lois que découlent la Masse et la Force, en nous bornant aux notions cardinales : et il en résulte assigné à la première le rôle de fournir une marque invariable des différents mobiles, tel que l'équivalent chimique des différentes substances, et à la seconde l'expression des relations les plus générales entre les mouvements naturels. Nul doute que l'œuvre de Kirchhoff a été des plus efficaces. Mais, si l'on cherche dans son système les trois qualités principales réclamées par Hertz ⁽¹⁾, on y trouvera la logique et l'exactitude : quant à l'opportunité, on pourra lui objecter qu'il présente la Mécanique rationnelle à un point de vue, autre que celui par lequel elle a atteint ses résultats, et qu'il est fort douteux qu'il lui aurait permis de les atteindre.

Hertz, par contre, qui plus récemment a donné l'exemple d'une nouvelle réforme radicale de l'exposition de la Mécanique ⁽²⁾, adoptant la division en Cinématique et Dynamique, mais dès le début même de la Cinématique tâchant d'établir la notion de la masse, énonce, comme fondement de la Dynamique, une loi générale, qu'on doit juger tirée originairement de l'expérience, à laquelle il est remis de fournir, par déduction logique, toutes les modalités des mouvements naturels : « *Systema omne liberum*

⁽¹⁾ *Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt.* Einleitung. 1894.

⁽²⁾ Ouvrage cité.

perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam ». Le système en question étant supposé un ensemble de points assujettis à des liaisons données, ce n'est que le théorème de la moindre contrainte, appliqué à l'hypothèse qu'il n'y ait pas de forces imprimées. Au point de vue de Hertz, cette proposition réalise une extension de la loi de l'inertie, la Lex I de Newton, en remontant du point au système matériel. Elle conduit, par la même voie, au fait de la force, qu'on dira appliquée à un mobile, lorsqu'il ne vérifie pas cette loi; mais ce n'est pas tout; concernant un système de points matériels quelconques, au lieu d'un seul point, elle fournit même les propriétés générales de la force, et il n'est plus nécessaire de les affirmer comme autant de lois fondamentales distinctes. Le fait que la force appliquée à un corps émane d'un autre corps, et la concomitance d'une force appliquée à celui-ci, émanant du premier, égale et contraire, découlent de ce que, si le mobile considéré ne vérifie pas la loi fondamentale, c'est qu'il forme avec un autre, par hasard, avec un corps « caché » un système qui la vérifie, dans son ensemble, par suite de l'élimination mutuelle des écartements des deux parties.

Or, cet avantage de la méthode de Hertz s'amointrit considérablement, dès qu'on remarque que le déplacement d'un système, dont il est question dans la loi fondamentale, engage la notion de la masse, sous la forme de nombre de « particules » compris dans un corps, et que dans la notion de la particule on ne retrouve pas ce qu'il est nécessaire pour préciser celui du nombre d'elles comprises dans un corps, ou dans un point matériel. En effet, la « particule » (Massentheilchen) n'est définie que comme un repère servant à établir une correspondance univoque entre deux points de l'espace, correspondant à leur tour à une valeur fixée et à une valeur quelconque du temps, c'est-à-dire un repère à l'aide duquel nous distinguons un point de l'espace, conçu comme mobile, dans les différentes positions qu'il atteint, pour de différentes valeurs du temps. Il est bien vrai que, dans la Dynamique, lorsqu'il s'agit d'adapter au cas de l'expérience les notions abstraites de la Cinématique, on convient de déterminer la masse à l'aide de la balance, ce qui revient à l'identifier au poids. Mais, en abstrayant même de la nécessité de s'entendre sur une relation

entre poids et point géométrique, à un tel point correspondant la particule, on ne peut pas accorder, à mon avis, l'usage de la balance pour y fonder la notion de la masse, au même égard que celui de la règle, pour l'espace, et du chronomètre, pour le temps. En effet, ceux-ci, envisagés au point de vue du rôle qu'ils jouent dans la détermination des notions de l'espace et du temps, se réduisent à un segment de droite, la première, et à un mobile étalon, le second : tandis que je ne sais concevoir la balance autrement que comme une machine effective, dont c'est à la Mécanique de développer la théorie.

Ce n'est même pas le cas, il me semble, de faire appel à l'exemple de Newton, car il tâche, comme nous avons vu, de s'en dégager ; et, d'autre côté, ce n'est plus question à présent que de choisir entre définir la masse à l'aide du poids ou faire la théorie du poids à l'aide de la masse, définie indépendamment de la pesanteur et de toute autre espèce particulière de forces.

Cette remarque s'applique à tout procédé qui tranche à la même façon la question de la définition de la masse. Une exception est certainement due à des expositions ayant un caractère particulièrement expérimental et pratique⁽¹⁾. Mais ce n'est pas le cas du procédé de Hertz : d'autant plus que, si la loi sur laquelle il est fondé, est censée empruntée à l'expérience, telle est cependant la nature de cette loi, qu'il n'y pas moins lieu à désirer dans ce procédé que dans celui de Kirchhoff un rôle de l'expérience plus conforme au vrai.

En effet, il ne fait place avant tout qu'aux systèmes "dont le mouvement est en partie fixé d'avance, en vertu de ces « liaisons », lesquelles ne sont réellement qu'une fiction mathématique, qu'un expédient subordonné au degré d'approximation qu'on se propose d'atteindre. D'autre côté, il pose en principe d'associer aux mobiles réellement observés un organe destiné à rendre raison de l'infraction de la loi fondamentale, dont on ne saurait pas préciser la signification matérielle, même dans les exemples les plus simples. D'où il s'ensuit que l'expérience y joue le rôle de relier

(1) Nous ne pourrions que faire des remarques analogues à l'égard de l'usage du dynamomètre pour établir la notion de la Force. Voyez à ce propos E. PICARD « Une première leçon de dynamique » (*L'Enseignement mathématique*, 2^e année, 1900).

les corps connus avec un corps inconnu, tandis que son procédé réel c'est l'analyse de leurs relations mutuelles, pour aboutir au cas élémentaire de deux points matériels, c'est-à-dire de deux corps en telles conditions qu'on puisse faire abstraction de leur qualité intrinsèque de systèmes, et de leur connexion avec le restant de l'univers.

III

Dans la Nature nous ne constatons réellement que le mouvement... Toute autre notion... est un produit de notre esprit tiré des propriétés du mouvement.

LOBATSCHESKY.

Je passe, après ces remarques historiques et critiques, à mon ordre d'idées, conforme, d'ailleurs, sur plus d'un point essentiel, à ceux de plusieurs illustres savants. Je me permettrai à ce propos d'entrer en plus de détails que je n'ai fait jusqu'à présent. En effet, lorsqu'il s'agit de principes et non pas de déductions, il faut accorder beaucoup à ce qu'on pourrait appeler l'idiosyncrasie intellectuelle, et il vaut mieux exposer sa propre pensée que de faire la critique des autres, en bornant celle-ci au nécessaire pour en rendre raison.

Entendu, par l'interprétation à présent universellement acceptée des postulats de la Géométrie, que cette science est fondée sur l'expérience ⁽¹⁾, j'envisage la Mécanique rationnelle comme ayant le même caractère et lui faisant suite, en admettant l'existence d'un espace à trois dimensions, doué de propriétés spécifiques, parmi lesquelles la possibilité du déplacement de ses parties sans déformation, et en imposant à ce déplacement de nouvelles conditions, en vue de reproduire, à un certain degré, les mouvements — c'est-à-dire les déplacements progressifs — des corps naturels, tels qu'ils sont relevés par l'expérience ⁽²⁾.

⁽¹⁾ « Geometry is a physical Science » CLIFFORD. *The common sense of the exact sciences*, 1885.

Voyez aussi A. VASSILIEF. « Les idées d'Auguste Comte. » (*L'Enseignement Mathématique*, 1900.)

⁽²⁾ Le lien existant entre la Géométrie et la Mécanique a été explicitement affirmé par Newton : « Geometria... nihil aliud est quam mechanicae universalis

Ces mouvements présentent ce caractère fondamental qu'ils sont reliés les uns avec les autres. En concevant l'espace comme variable par la dislocation de ses parties, et en appelant *simultanées* les positions de deux parties qui appartiennent à une même configuration, la succession des positions d'un corps détermine celle des positions simultanées de tous les autres. Nous ne disons pas par là qu'elle en résulte connue; nous avançons, pour éviter toute fausse interprétation, que pour cela il faudrait connaître un mouvement infinitésimal de tous les corps de l'univers, pour en déduire, d'après ce qui va suivre, la position et la condition de mouvement (c'est-à-dire la vitesse de chaque point) ⁽¹⁾, à un instant donné, et la relation constante existant entre la position et ce que nous appellerons plus tard la force motrice.

Lequel principe étant admis, le temps qu'un mobile emploie à passer d'une position à une autre résulte simplement représenté par un mouvement étalon simultané, en réalité par le mouvement apparent simultané de la sphère céleste.

Après cela, je définis la Mécanique rationnelle comme la « théorie mathématique de la corrélation mutuelle des mouvements des corps naturels », et je lui assigne le rôle de développer les conséquences logiques de certains postulats, qui résument les caractères les plus généraux de cette corrélation, en vue d'*expliquer*, par ces conséquences, la dépendance mutuelle des mouvements naturels, relevée par l'expérience.

Le temps, en tant qu'il sert à la Mécanique, est ramené par cela au mouvement. Si la définition du temps absolu est possible, la Mécanique n'a rien à y voir, c'est une question étrangère à notre sujet ⁽²⁾.

pars illa quae artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat (« *Principia* » *Praefatio ad lectorem*).

D'autre côté, Lobatschewsky applique aux notions géométriques la proposition que nous venons de citer, dont voici la conclusion: « par conséquent un espace en soi-même, isolé, n'existe pas pour nous. » (Voyez le discours de M. A. VASSILIEF « *Značenie N. J. Lobačevskago dlja Imp. Kozanckago Universsiteta* » Kazan, 1896.)

⁽¹⁾ Nous appelons « condition de mouvement » (*atto di movimento*) d'un corps, à un instant donné, l'ensemble des vitesses de ses points à cet instant, chacune étant rapportée à son point.

⁽²⁾ Ce n'est pas évidemment du temps, avec notre acception de ce mot, dont saint Augustin, après avoir combattu « *tempus esse motus corporis* » affirme: « *Non metior futurum, quia nondum est; non metior praesens, quia nullo spatio tenditur; non metior praeteritum, quia jam non est.* » (*Confessiones*, lib. XI.)

Nous sommes également dispensés, par suite de l'origine expérimentale reconnue à nos hypothèses fondamentales, de poser la question de la position absolue. En effet, elle résulte du choix de certains « derniers repères » — en réalité de certaines étoiles fixes — auxquels est rapportée ou ramenée la position observée pour énoncer ces hypothèses, et on doit rapporter ou ramener chaque fois la position, pour comparer avec leurs conséquences logiques les résultats de l'observation. La position rapportée à ces repères compte pratiquement comme absolue, parce que nous ne serons obligés à corriger la position de nos mobiles, pour effectuer cette comparaison, formant le dernier but de notre science, que dans le cas qu'elle soit rapportée à d'autres repères ⁽¹⁾.

Enfin, en concevant tout « mobile », sensiblement comme une portion variable de l'espace, dont les points se correspondent bi-univoquement dans ses différents états, représentant autant de positions du même mobile, ou, plus en général, comme une réunion de plusieurs de telles portions variables de l'espace, nous ne sommes pas obligés de définir la matière en Mécanique plus qu'en Géométrie.

Cependant, le mobile de la Mécanique diffère substantiellement de celui de la Géométrie, par la subordination de son mouvement au mouvement des autres. Nous avons affirmé tout à l'heure qu'on devra établir les modalités générales de cette corrélation, constituant nos postulats cardinaux, avec le critérium de reproduire les phénomènes relevés par l'expérience dans les corps naturels. Des propositions (1) « les accélérations moyennes ⁽²⁾ de deux corps, conçus isolés entre eux, sont ou nulles ou égales et contraires et en rapport invariable » (2) « le quotient des rapports des accélérations moyennes des deux corps, conçus séparément isolés avec un troisième, coïncide avec le rapport correspondant des accélérations moyennes de deux corps conçus isolés entre eux », nous déduisons une quantité reliée avec tout mobile,

(1) On nous a demandé quel sens a la proposition que le centre de masse de tous les corps de l'univers ne pourrait être qu'en repos ou animé d'un mouvement uniforme et rectiligne. C'est simplement ce qu'on vérifierait en rapportant ses positions aux repères en question.

(2) Accélération du centre de masse.

appelée sa « Masse » ou « Quantité de matière », qu'il est réservé à la théorie de la gravitation universelle de constater comme étant proportionnelle au poids. En attendant, en deux corps quelconques, elles résultent, inversement, proportionnelles à leurs accélérations moyennes, dans l'hypothèse qu'ils soient conçus isolés l'un avec l'autre ⁽¹⁾. Le procédé de cette déduction rappelle celui par lequel on déduit « l'équivalent » de chaque substance des lois chimiques des proportions définies et des équivalents.

Ces postulats se traduisent en substance dans les lois newtoniennes de l'égalité de l'action et de la réaction (Lex III) et du parallélogramme des forces (Lex II). Cependant, nous établissons la première avec les perfectionnements proposés par M. Mach ⁽²⁾, et la seconde en y introduisant, selon Clifford ⁽³⁾, la condition que l'accélération moyenne de deux corps, conçus isolés l'un avec l'autre, soit déterminée par la position, et, ajoutons-nous, par la condition physique, comprenant la qualité particulière des corps. C'est à l'aide de ces conditions que l'accélération moyenne qu'un corps, isolé avec plusieurs autres, *présenterait*, isolé avec chacun d'eux, dont il est question dans la deuxième loi, reçoit une signification précise, et qu'on n'est pas obligé, pour en indiquer une, de faire appel à une force préexistante et de la lui assigner.

Partant, on a recours à l'expérience, en premier lieu, pour révéler les modalités les plus générales du mouvement d'un couple de corps, supposés en telles conditions qu'on puisse pratiquement les considérer comme isolés l'un avec l'autre, et, en second lieu, pour ramener à ce cas élémentaire celui d'un nombre quel-

⁽¹⁾ Cette façon de mesurer la quantité de matière peut sembler tout à coup bien artificieuse. Il n'en est rien. A cela revient en substance ce que nous faisons quand, pour juger si une caisse fermée est pleine ou vide, nous y appliquons notre main (c'est le corps en présence) et nous observons si elle cède plus ou moins promptement.

⁽²⁾ *Die Mechanik in ihrer Entwicklung dargestellt*, 1883, Kap. II, § 7.

M. VASCHY dans sa remarquable Note « Sur la définition des masses et des forces » (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1895) remonte, pour établir la notion de la masse à l'attraction mutuelle des corps célestes, suivant la loi de Newton, de laquelle le principe de l'égalité de l'action et de la réaction découle avec le complément, en plus, dont il est question dans notre exposition.

⁽³⁾ Ouv. cité, cap. IV, Motion.

conque de corps, qu'on peut, de la même façon, considérer comme isolés entre eux. Nul besoin d'une proposition spéciale pour le cas d'un corps isolé de tous : en le concevant décomposé d'une façon quelconque en deux parties, et par conséquent comme un couple isolée de corps, son accélération moyenne résulte nulle.

Les corps auxquels ces propositions s'appliquent sont censés représenter des portions finies de l'espace. Nous tâchons, en nous écartant d'un usage presque universel, que même Hertz a gardé, d'éviter de commencer par le « point matériel ». Nous avons recours pour cela à l'accélération moyenne. Celle-ci se réduit à l'accélération du centre de masse. Il nous faut donc, pour la définir, nous préparer d'avance la définition de la « densité » : c'est-à-dire d'une fonction positive des points du corps, caractérisée par la propriété que son intégrale, étendue au volume d'une portion quelconque, représente la masse de cette partie. Nous y parvenons, en commençant par une espèce de mobile, que nous appelons « figure matérielle », pour laquelle l'accélération moyenne est simplement définie comme la valeur moyenne ordinaire de l'accélération de ses points. Nous trouvons en appliquant à la figure matérielle les propriétés que nous venons de rappeler, et en y ajoutant explicitement que toute partie d'une figure matérielle est elle-même une figure matérielle, que la grandeur de la masse d'une partie quelconque aura avec celle du volume un rapport constant⁽¹⁾. C'est la grandeur de la densité de la figure matérielle considérée. Nous démontrons ensuite que les propriétés assignées à la figure matérielle appartiendront nécessairement à tout système de figures matérielles, en définissant la grandeur de la masse du système par la somme des grandeurs des masses des figures composantes et l'accélération moyenne par un vecteur, qui, en rappelant l'expression bien connue des coordonnées du centre de masse, auxquelles nous parvenons par cette voie, résulte l'accélération du centre de

(1) Qu'il me soit permis de prendre cette occasion pour remarquer que, dans la démonstration de mon livre cité plus haut (§ 215) il est entendu que l'accélération moyenne des diverses parties, en lesquelles on conçoit décomposée d'une façon arbitraire la figure matérielle, peut varier à l'infini en isolant la figure avec autant d'autres choisies arbitrairement.

masse du système. Après tout cela, nous définissons le « corps naturel » comme un mobile présentant les propriétés établies ci-dessus, y substituant, si c'est nécessaire, une fonction quelconque des points du mobile à la fonction qui représente la densité du système de figures matérielles et reçoit partant dans chaque figure une valeur particulière. Cela revient à commencer par le corps homogène et en déduire le corps naturel le plus général en y *inscrivant* un ensemble de corps homogènes de densités différentes, ou, plus en général en y *inscrivant* un ensemble variable de corps homogènes et en passant à la limite quand chacun d'eux tend vers un point, en même temps que leur nombre augmente infiniment.

Le point matériel n'est pas nécessaire pour expliquer, dans la statique exposée *à priori*, le point d'application d'une force, naissant tout spontanément du point d'appui d'une tige ou du point d'attache d'une corde tendue, en concevant que celles-ci se réduisent idéalement à une droite. Il est susceptible de significations absolument fictives ; par exemple, lorsqu'on identifie, par le théorème de Newton, l'action d'une croûte sphérique à couches concentriques homogènes avec celle d'un point attirant, ayant même masse que la croûte et placé à son centre. Sa signification réelle la plus précise reste, à notre avis, celle d'un corps dont les dimensions sont extrêmement petites en comparaison avec les distances qu'il faut considérer ; ce n'est qu'avec une telle signification que nous trouvons admissible la définition qu'en donnent certains auteurs à l'aide de la « molécule ». Nous jugeons un avantage de notre procédé d'y substituer quelque chose d'incomparablement plus proche à l'observation : quitte à nous servir du mot, les notions fondamentales une fois posées, pour abrégier le langage, et appeler une propriété du point matériel ce qui n'est en réalité que la limite d'une propriété d'un corps quand le rayon d'une sphère capable de l'embrasser tend vers zéro.

C'est avec une telle notion que j'introduis à son temps la « force élémentaire correspondante à une condition physique déterminée » — autrement appelée la « force motrice d'un point matériel, conçu isolé avec un autre, dans la condition physique supposée » — nous habilitant à écrire d'emblée les six équations cardinales du mouvement des corps continus, auxquelles on arrive

ordinairement en passant par les systèmes de points matériels.

Nous définissons, après avoir établi les notions de l'accélération d'un corps naturel et de sa masse, la « force motrice » du même corps tout simplement comme le vecteur produit de l'une par l'autre. C'est des propriétés dont, en vertu des postulats fondamentaux, jouit cette combinaison de masse et d'accélération que découle la raison de la considérer et de la désigner par une dénomination spéciale. La dénomination de force, consacrée par la tradition, lui reste toujours appropriée. En effet, les propriétés de cette combinaison lui confèrent une place particulière parmi les quantités pouvant servir à représenter l'action mutuelle des corps.

Cette action mutuelle ne représente, il faut bien le constater, en aucune façon, un fait autre que la corrélation des mouvements des mêmes corps formant la circonstance cardinale du problème de la Mécanique rationnelle. Si nous donnons notre préférence à cette dernière expression, c'est qu'elle répond mieux, à notre avis, au procédé que nous concevons suivi pour poser les postulats fondamentaux, consistant dans la déduction des propriétés les plus générales du mouvement des corps naturels directement de l'observation du même mouvement. Nos mobiles, contraints à vérifier cette corrélation, suivant les postulats en question, cessent par cela d'être des simples figures géométriques, dont on considère une succession continue de transformations. Nous les appelons partant des « corps naturels », sans la prétention, bien entendu, de reconstituer intégralement les corps de la Nature. C'est bien plus comme une image d'eux, qui en reproduit certains aspects, qu'il faut les considérer : et, nous plaçant à ce point de vue, nous les appelons parfois des mobiles « fictifs ». Nous sommes bien loin de porter atteinte par ce terme aux rapports existants entre la Mécanique rationnelle et la réalité expérimentale. Cependant, si cette science est greffée sur la Physique, il faut bien convenir que, se proposant avant tout de démontrer la connexion logique des faits, elle est obligée à faire abstraction de plusieurs circonstances, en une mesure plus ou moins grande, suivant ses problèmes, à accueillir l'apparence comme réalité, l'approximation comme exactitude, pour conclure à la connexion des faits réels, en passant par celle de faits plus

simples, plus aisément assujettissables au raisonnement et au calcul.

Au demeurant, afin que notre image garde autant que possible une plus grande fidélité, nous réunissons d'abord, en une première section, sous le titre de « Propriétés générales du mouvement » toutes les questions qui n'exigent que les postulats fondamentaux, inclusivement jusqu'à celui que la force élémentaire est dirigée suivant la droite joignant les deux points auxquels elle se rapporte. En effet, comme on peut distinguer deux grands problèmes, tracer les modalités générales des mouvements qu'on observe en Nature et déterminer les circonstances spécifiques des mouvements naturels particuliers, il nous semble d'assigner à chacun d'eux une section séparée de la Mécanique rationnelle.

Les questions formant le second des deux problèmes ne sont pas résolubles, en général, qu'à la condition d'admettre *a priori* certaines propriétés du mouvement considéré. Par exemple, pour déterminer le mouvement d'un projectile lancé par une bouche à feu, il faudra commencer par lui attribuer la propriété de la rigidité : pour déterminer le mouvement du pendule d'une horloge, il faudra lui attribuer la propriété de la rigidité et celle en plus d'une droite horizontale invariablement liée au globe terrestre. C'est ce qu'on appelle des « liaisons », que nous envisageons partant comme des propriétés du mouvement admises d'avance. Nous ne les introduisons que dans la deuxième section de la Mécanique, portant le titre de « Calcul du Mouvement ».

Ces questions exigent une expression *effective*, assujettissable au calcul, de la force d'inertie en chaque point du mobile, ou, au moins, de la résultante et du moment par rapport à un point quelconque de l'ensemble des forces d'inertie de ses points. D'autre côté, c'est une circonstance ordinaire, presque caractéristique, de ces mêmes questions, l'intervention directe ou indirecte du contact d'un corps avec un autre : auquel il est aisé de réduire la plus grande partie des liaisons en les envisageant par hasard comme des cas limites (un point fixe comme la limite d'une sphère remplissant une cavité, etc.). Et aussitôt que cette circonstance se présente il n'est plus possible d'assigner une expression effective à la force élémentaire.

C'est pour cela que la « pression » fait son apparition, en même temps que les liaisons, dans la deuxième section. A l'aide de la pression nous pouvons présenter l'action d'un corps sur un autre sous la forme d'une action de leurs surfaces contiguës : c'est tout simplement ce qu'on fait, dans le langage ordinaire, quand on explique par une pression de la paume l'action des muscles sur un objet qu'on tient dans sa main. Nous en tirons l'avantage de faciliter les hypothèses appropriées aux différents problèmes, et le recours à l'expérience pour les démêler et les contrôler par l'accord des faits.

Nous joignons à la pression la « force accélératrice limite » : laquelle, en chaque point d'un corps, est la limite de la force accélératrice calculée à l'aide de l'expression de la force élémentaire valable dans l'hypothèse qu'il n'y ait pas de contact, en ôtant du corps considéré une petite portion entourant le point, et en faisant ensuite évanouir le rayon d'une sphère capable de comprendre la même portion. Cette force élémentaire, dans les problèmes ordinaires, est simplement la force newtonienne : et la force accélératrice limite correspondante résulte composée de la gravité et de ce qu'on appelle la force newtonienne intérieure, déterminée par le corps auquel le point considéré est censé appartenir.

Après cela, nous présentons le système des forces accélératrices extérieures, appliquées au mobile considéré, comme composé du système des forces accélératrices limite correspondant aux conditions physiques supposées et d'un système de pressions appliquées aux points de la surface du corps. Ce dernier système résulte, dans nos hypothèses, parfaitement déterminé. Ce n'est pas de même, quand on ne définit pas également, à son tour, le système complémentaire.

Nous accordons une place spéciale à la liaison de la rigidité du mobile, ou, plus en général, des pièces dans lesquelles on peut concevoir de le décomposer. Les théorèmes du mouvement du centre de masse et des aires fournissent, en ce cas, un nombre d'équations (équations cardinales) égal à celui des coordonnées nécessaires pour fixer la position du mobile. C'est le cas du système de corps rigides libres. Lorsque d'autres liaisons s'ajoutent à la rigidité du mobile, ou des pièces en question, — système de

corps rigides à liaisons — en les concevant, de la façon que nous venons de dire tout à l'heure, comme correspondant au contact de deux surfaces, nous y joignons un système de pressions. Un même principe nous sert par cela pour le calcul du mouvement des corps rigides à liaisons et pour celui des corps variables quelconques.

Quant à la détermination effective des pressions, nous distinguons les « pressions de liaison », auxquelles nous imposons la propriété caractéristique, leur servant de définition, que la puissance de l'ensemble de ces pressions, correspondant à toute condition de mouvement virtuelle du système considéré, est nulle (autrement dit, tout travail élémentaire virtuel est nul). Nous « appelons pression préalablement donnée » toute pression qui « n'est pas de liaison » : et système des « forces imprimées » l'ensemble de ces dernières pressions et des forces limites. Nous comptons les « pressions de frottement » parmi les pressions préalablement données. Notre énonciation du théorème de d'Alembert et Lagrange ne contient pas, en conséquence, la restriction ordinaire qu'il s'agisse de liaisons sans frottement.

Suivant le procédé de Kirchhoff, de Hertz et de bien d'autres, nous considérons l'équilibre comme un cas particulier du mouvement. C'est la forme de mouvement correspondant, *caeteris paribus*, aux conditions initiales que la position à un instant donné soit une position d'équilibre et la force vive, au même instant, nulle ⁽¹⁾.

Nous supposons les liaisons toujours représentables par un système d'équations aux différentielles totales, de premier ordre et linéaires, entre les coordonnées du mobile et le temps. C'est une hypothèse de Hertz, généralisée en cela que nous admettons

(1) Nous avons remarqué plus haut que, dans des conditions convenablement limitées, il peut être même préférable de traiter la statique à part. Dans une telle exposition, une démonstration du principe des vitesses virtuelles pourra trouver sa place aussi bien que la démonstration du principe du parallélogramme des forces que nous avons rappelée. Nous ne saurions hésiter, à cet égard, à choisir la conception géniale d'Aristote rapportant l'effet d'une force donnée à la « mobilité » de son point d'application : « Αἰεὶ δὲ ὅσω ἂν μείζον ἀφεσπτήκοι τοῦ ὑπομοχλίου (ἢ ἰσχύος) ῥάον κινήσει. Αἰτία δὲ ἐστίν... ὅτι ἡ πλείον ἀπέχουσα ἐκ τοῦ κέντρου (γραμμῆ) μείζονα κύκλον γράφει. » Voyez G. VAILATI. *Il principio dei lavori virtuali da Aristotele ad Erone d'Alessandria*. (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1896-97).

même des liaisons dépendant du temps. Les liaisons en résultent plus limitées, mais en retour beaucoup mieux précisées.

Le procédé classique nous fournit ce que nous appelons les équations différentielles « pures » du mouvement : c'est-à-dire dégagées de toute trace des pressions de liaison. Elles sont censées contenir en général les pressions de frottement. C'est un résultat de l'expérience que l'hypothèse que ces pressions soient négligeables correspond à une classe intéressante de mouvements naturels, caractérisable par une circonstance physique assez bien définie, le contact poli : et aussi qu'en les supposant représentées par certaines expressions, se rapportant en partie au cas du frottement nul, il est possible de faire une théorie par approximation d'autres mouvements naturels, dans lesquels cette circonstance physique n'est plus suffisamment remplie. Ce serait un grand perfectionnement de la Mécanique rationnelle que d'assigner l'expression générale des pressions de frottement. Les conclusions de M. Painlevé, dans ses belles « Leçons sur le frottement » (1) sont à ce sujet les plus avancées. Il est peut-être réservé à une hypothèse heureuse d'éclairer l'expérience, laquelle n'a pu fournir jusqu'à présent des notions assez sûres pour former le fondement d'une théorie rationnelle du phénomène.

Un autre perfectionnement à désirer, c'est de renforcer le lien entre les deux sections de la Mécanique rationnelle que nous avons distinguées par les noms de « Propriétés générales du mouvement » et « Calcul du mouvement ». La première aboutit aux équations cardinales, et ces équations sont le point de départ de la seconde. Cependant, ce n'est qu'en glissant sur les raisonnements qu'on en conclurait à leur parfait enchaînement. En effet, le postulat de la force élémentaire égale et contraire pour les deux points auxquels elle se rapporte, tiré des expériences sur la gravitation, l'électricité, le magnétisme, etc., à l'aide duquel nous déduisons, dans la première section, les équations cardinales, n'est qu'une condition suffisante pour leur subsistance. Il s'ensuit que lorsque, dans la deuxième section, nous posons ces équations d'avance, nous sommes obligés, ou à généraliser nos postulats, ou à borner la validité de nos conséquences. C'est

(1) Paris, 1895.

un problème bien intéressant que d'éclaircir cette généralisation et ces bornes. L'étude classique de M. Mayer ⁽¹⁾ nous apprend bien des choses à ce sujet dans le cas d'un système de points matériels, sollicités par des forces dérivant d'un potentiel, fonction en général du temps, des coordonnées et des vitesses. Il est à souhaiter que la théorie mathématique, en devançant l'expérience, nous révèle par la même voie des propriétés fondamentales inconnues du mouvement, dans ces espaces infranchissables à l'observation directe qu'il est convenu d'appeler la sphère des actions moléculaires.

G.-A. MAGGI (Pise).

LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES NOMBRES

1. Dans cette note nous voulons nous occuper des signes que l'on peut employer pour indiquer les nombres, quand on veut s'en servir dans le discours ou dans le calcul.

Pour que l'usage de ces signes soit juste et efficace, il faut que chaque nombre soit représenté par un signe particulier, et que, si deux nombres sont différents entre eux, les signes ou symboles le soient aussi; de sorte qu'il s'en suit que la numération écrite est une correspondance bi-univoque entre nombres et signes.

En nous arrêtant en particulier aux nombres réels, valeurs absolues, et, en observant que ces nombres sont en correspondance bi-univoque avec les individus de toute classe linéaire continue de grandeurs homogènes, on voit que si les grandeurs d'une classe ont des signes représentatifs, ces signes peuvent être employés pour représenter aussi les nombres.

Les grandeurs les plus faciles à représenter graphiquement, et

⁽¹⁾ *Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte, welcher sich aus dem Princip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ergibt.* (*Mathematische Annalen*, t. XIII.)

Voyez aussi APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, ch. xxv.