Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1901)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOUVELLES FORMULES POUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES DES ANGLES D'UN QUADRILATERE

Autor: Redl, Franz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4657

Nous nous sommes appuyé, dans cette démonstration, sur cette proposition évidente, d'après ce qui précède, que par un point on peut toujours mener une parallèle et une seule à une droite donnée.

Notre tâche est ainsi terminée et nous pensons avoir démontré qu'on peut construire toute la Géométrie euclidienne sans le postulatum et, cela, en nous appuyant uniquement sur le principe d'homogénéité et celui de continuité sans lesquels il n'y a ni grandeur ni espace d'aucune espèce possible, ni aucune science, par conséquent. Nos prémisses sont donc irréfutables.

Nous en avons déduit la possibilité de rapporter une grandeur linéaire à une grandeur quelconque et ce principe est tel que, sans lui, il n'y a certainement pas de Géométrie euclidienne et, comme nous l'avons dit, il est constamment invoqué, directement ou indirectement, tout le long de cette science. On ne peut donc s'en passer, sans faire un cercle vicieux inconscient. C'est pourquoi, il faut le placer au début de cette science et alors tout s'en déduit facilement. C'est, du moins, ce que je pense avoir démontré.

E. Wickersheimer (Paris).

NOUVELLES FORMULES

POUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

DES ANGLES D'UN QUADRILATÈRE

On peut construire très simplement, au moyen du cercle d'Apollonius, un quadrilatère dont on connaît les quatre côtés a, b, c, d, et la somme des deux angles opposés.

Une autre solution graphique de ce problème, un peu moins simple il est vrai, mais très élégante, repose sur l'emploi d'angles auxiliaires tirés de l'équation

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(\sigma - \theta) = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\sigma + \theta),$$

où

$$2\sigma = \alpha + \gamma \quad \text{et} \quad 2\theta = \gamma - \alpha.$$

Quant au calcul trigonométrique du quadrilatère, d'après les mêmes données, on se bornait, jusqu'à présent, à déterminer l'aire V, et cela par deux méthodes se basant, la première sur les deux équations

$$2ab \sin \alpha + 2cd \sin \gamma = 4V$$
$$2ab \cos \alpha - 2cd \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$

la deuxième, sur le produit et l'angle ε des diagonales

$$2V = ef. \sin \varepsilon.$$

Pour déterminer l'un des angles, β, par exemple, on a l'équation

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta = a^2 + d^2 - 2ad \cos \delta,$$

d'où l'on a, en substituant à δ la valeur $360 - 2\sigma - \beta$ et en décomposant $\cos(2\sigma + \beta)$,

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 = 2\,(bc - ad \cos 2\sigma) \cos \beta + 2ad \sin 2\sigma \sin \beta.$$

De là on tirera $tg\beta$:
soit en calculant $\sin\beta$ et $\cos\beta$ et en formant le rapport $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = tg\beta$, ce qui donne

$$tg\,\beta = \frac{4ad \sin 2\sigma\; bc\,(b^2 + c^2 - a^2 - d^2) \pm 8\,(bc - ad \cos 2\sigma)\,V}{2\,(bc - ad \cos 2\sigma)\,(b^2 + c^2 - a^2 - d^2) \mp 8ad \sin 2\sigma\, V};$$

soit en divisant toute l'équation par $\cos\beta$ et en résolvant l'équation du second degré en $tg\beta$ que l'on obtient ainsi ; le résultat est d'une forme différente

$$tg\,\beta = \frac{4ad \sin 2\sigma \,\{ bc - ad \cos 2\sigma \} \pm 4V\,(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)}{(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 - 4a^2d^2 \sin^2 2\sigma}.$$

En égalant ces deux valeurs, on forme une proportion d'où l'on peut déduire de nouvelles expressions de $tg\beta$. On trouverait facilement, comme on le verra plus loin, une formule présentant une certaine analogie avec la précédente ; c'est la relation,

$$tg\,\beta = \frac{16V^2 - 4a^2d^2 \sin^2 2\sigma}{4V\,(b^2 + c^2 - a^2 - d^2) - 4ad \sin 2\sigma \,\{ bc - ad \cos 2\sigma \}};$$

qui nous montre bien que le problème n'a qu'une solution, malgré les doubles signes des deux premières formules ; en fait, les signes supérieurs seuls sont corrects (les autres correspondraient au cas où $\beta + \delta = 2\sigma$).

Ces formules de la tangente de l'angle d'un quadrilatère ne sont pas, comme on le voit, d'une simplicité remarquable ; aussi ai-je cherché si l'on ne pourrait trouver, pour les fonctions du demi-angle, des expressions plus simples. Je suis arrivé, au moins pour la tangente du demi-angle, à des formules doubles

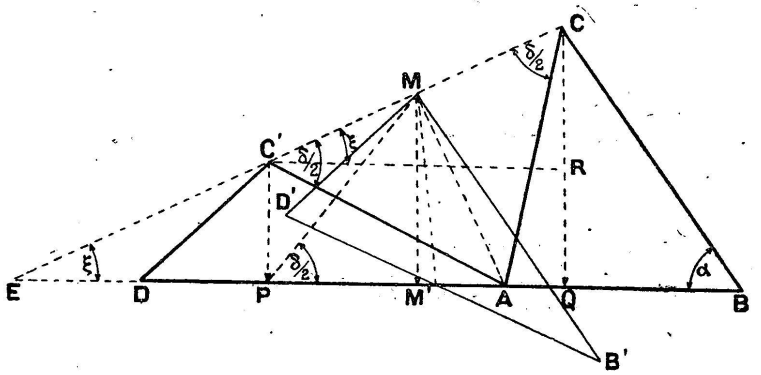

Fig. 1.

très simples qui, non seulement, offrent une grande analogie avec les formules du quadrilatère inscrit, mais encore permettent de déduire immédiatement quatre nouvelles formules de l'aire du quadrilatère. C'est également en me basant sur elles que j'ai trouvé la troisième forme de $\operatorname{tg}\beta$ que je viens d'indiquer. A la fin de ce travail, je montrerai leur application à deux exemples élémentaires.

Le procédé que j'emploie pour trouver les formules du demi-angle a cet avantage qu'il nous suffit d'envisager le cas spécial où $2\sigma = 180$, pour avoir une construction du quadrilatère inscrit d'après ses quatre côtés, construction que je crois nouvelle.

Soit la figure 1, dans laquelle les triangles ABC et CDA, formés par la diagonale AC, dans le quadrilatère ABCD, ont été, comme on le voit, séparés et amenés par une rotation autour de A dans une position telle que les côtés AB et AD se trouvent en ligne droite. Cela a pour but de mettre en évidence le demi-angle $\frac{\delta}{2}$, dont le sommet est en A.

Désignons les côtés consécutifs du quadrilatère ABCD ou pour préciser AB, BC, CD et DA, par a, b, c, d ; nous avons immédiatement par la considération des triangles rectangles C′DP et CBQ

$$C'P = c \sin\gamma \qquad \text{et} \qquad CQ = b \sin\alpha,$$

d'où

$$MM' = \frac{b \sin\alpha + c \sin\gamma}{2}; \qquad \text{I}$$

toujours dans les mêmes triangles, on a

$$DP = c \cos\gamma \qquad \text{et} \qquad BQ = b \cos\alpha,$$

d'où

$$PM' = \frac{a + d - b \cos\alpha - c \cos\gamma}{2}. \qquad \text{II}$$

Mais les points AMC′P forment un quadrilatère inscrit, les angles AC′M et APM sont égaux, et le triangle rectangle MPM′, nous donne

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{b \sin\alpha + c \sin\gamma}{a + d - b \cos\alpha - c \cos\gamma}. \qquad \text{III}$$

De la similitude des triangles CC′R et MAM′, on déduit

$$MM' : C'R = M'A : CR;$$

$$M'A = \frac{d - a + b \cos\alpha - c \cos\gamma}{2},$$

mais

$$CR = b \sin\alpha - c \sin\gamma, \qquad C'R = a + d - b \cos\alpha - c \cos\gamma,$$

d'où remplaçant dans la proportion et comparant à III

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{b \sin\alpha + c \sin\gamma}{a + d - b \cos\alpha - c \cos\gamma} = \frac{d - a + b \cos\alpha - c \cos\gamma}{b \sin\alpha - c \sin\gamma}. \qquad \text{IV}$$

On obtient aussi cette équation IV, en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles CAQ et C′AP et en égalant les valeurs des hypoténuses [1].

On peut déduire de l'équation IV plusieurs nouvelles expres-

---

(1) Le second quotient de la formule IV peut, comme le premier, être obtenu directement. Il suffit de faire subir aux triangles ABC et CDA une rotation autour de A de manière que AB et AD prennent la même direction.

sion pour $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$; il suffit de multiplier les deux termes de chaque quotient par une quantité quelconque, et de former le rapport de la somme (ou de la différence) des nouveaux numérateurs et de la somme (ou de la différence) des nouveaux dénominateurs. C'est ainsi que l'on obtient, par exemple, la formule

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\frac{2\left\{ac\sin\gamma+bd\sin\alpha-bc\sin(\alpha+\gamma)\right\}}{(a+d)^2+b^2+c^2+2bc\cos(\alpha+\gamma)-2(a+d)(b\cos\alpha+c\cos\gamma)}$$

qui nous donne, en la comparant au premier nombre de l'équation IV, la formule

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\frac{4V+2bc\sin(\alpha+\gamma)}{(a+d)^2-b^2-c^2-2bc\cos(\alpha+\gamma)}. \qquad V_\delta$$

On arriverait directement à cette formule en multipliant dans l'équation IV, les deux termes du quotient de gauche par l'expression $(a+d+b\cos\alpha+c\cos\gamma)$ et deux du quotient de droite, par le dénominateur de celui-ci et en soustrayant ensuite les deux numérateurs et les deux dénominateurs l'un de l'autre.

On obtient pour $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$ une deuxième expression analogue à cette dernière si l'on multiplie les deux termes du premier quotient par le numérateur de celui-ci : $b\sin\alpha+c\sin\gamma$, les deux termes du deuxième par l'expression $(a-d-c\cos\gamma+b\cos\alpha)$, et qu'on ajoute l'un à l'autre les deux nouveaux numérateurs, d'une part, les deux nouveaux dénominateurs de l'autre :

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\frac{b^2+c^2-2bc\cos(\alpha+\gamma)-(a-d)^2}{4V-2bc\sin(\alpha+\gamma)}. \qquad VI_\delta$$

En égalant V_δ et VI_δ on a la formule suivante qui donne l'aire du quadrilatère

$$16V^2-4b^2c^2\sin^2 2\sigma=\left\{(a+d)^2-b^2-c^2-2bc\cos 2\sigma\right\}\left\{b^2+c^2-2bc\cos 2\sigma-(a-d)^2\right\}. \qquad VII_\delta$$

L'analogie de ces formules V, VI, VII avec celles du quadrilatère inscrit est évidente, en posant $\alpha+\gamma=180^\circ$, on passe sans autre transformation des unes aux autres.

On peut écrire directement des formules identiques pour les autres demi-angles $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{4V + 2ad\sin(\alpha+\gamma)}{(b+c)^2 - a^2 - d^2 - 2ad\cos(\alpha+\gamma)} \qquad V_\beta$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha+\gamma) - (b-c)^2}{4V - 2ad\sin(\alpha+\gamma)} \qquad VI_\beta$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{4V - 2cd\sin(\alpha+\gamma)}{(a+b)^2 - c^2 - d^2 - 2cd\cos(\alpha+\gamma)} \qquad V_\alpha$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{c^2 + d^2 - 2cd\cos(\alpha+\gamma) - (a-b)^2}{4V + 2cd\sin(\alpha+\gamma)} \qquad VI_\alpha$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{4V - 2ab\sin(\alpha+\gamma)}{(c+d)^2 - a^2 - b^2 - 2ab\cos(\alpha+\gamma)} \qquad V_\gamma$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\gamma) - (c-d)^2}{4V + 2ab\sin(\alpha+\gamma)}. \qquad VI_\gamma$$

De ces formules donnant $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, on déduit, pour l'aire du quadrilatère, les trois suivantes :

$$16V^2 - 4c^2d^2\sin^2 2\sigma = \{(a+b)^2 - c^2 - d^2 - 2cd\cos 2\sigma\}\\ \{c^2 + d^2 - 2cd\cos 2\sigma - (a-b)^2\}$$

$$16V^2 - 4a^2d^2\sin^2 2\sigma = \{(b+c)^2 - a^2 - d^2 - 2ad\cos 2\sigma\}\\ \{a^2 + d^2 - 2ad\cos 2\sigma - (b-c)^2\}$$

$$16V^2 - 4a^2b^2\sin^2 2\sigma = \{(c+d)^2 - a^2 - b^2 - 2ab\cos 2\sigma\}\\ \{a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\sigma - (c-d)^2\}.$$

On pourrait, d'ailleurs, obtenir l'aire du quadrilatère en se servant de la relation

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}},$$

mais ce procédé n'est recommandable que lorsqu'il s'agit du quadrilatère inscrit.

Si l'on substitue les valeurs V et VI dans la relation connue

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},$$

on obtient les troisièmes formules de la tangente de l'angle du quadrilatère que j'ai mentionnées au début. Je rappellerai en même temps les formules suivantes que j'emploierai ultérieurement

$$\sin\varphi = \frac{2}{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{\varphi-\psi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\psi}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}$$

$$\frac{\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}.$$

Les formules V et VI peuvent se mettre sous une forme symétrique facile à retenir.

Menons du point M (fig. 1) des droites MB′, MD′, égales et parallèles aux côtés BC et C′D du quadrilatère, nous formons ainsi un triangle MB′D′, dont l'aire V′ est donnée par la formule

$$4V' = 2bc\sin(\alpha+\gamma),$$

et la base B′D′ par l'expression $b^2+c^2+2bc\cos(\alpha+\gamma)$; ce qui permet d'écrire la formule V_δ sous la forme

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{4(V+V')}{\overline{BD}^2 - \overline{B'D'}^2}. \qquad \text{VIII}$$

De même, les formule V_α V_β V_γ prendront une forme analogue.

Quant aux formules VI, il suffirait, pour les mettre sous la forme correspondante, de faire tourner le triangle C′AD autour de A, de sorte que AD ait le même sens que AB et de procéder de la même façon.

En cherchant les formules V, VI, VII, nous avons supposé que le quadrilatère était convexe ; cependant ces formules conservent leur valeur pour le cas du quadrilatère concave, pourvu que l'on prenne garde au sens dans lequel sont formés les angles, soit par exemple un quadrilatère en croix ABCD, où nous désignerons par δ_1 l'angle CAB, par δ_2 l'angle CAD, par δ' l'angle DAB, nous avons évidemment la relation

$$\delta' = \delta_1 - \delta_2.$$

Rabattons le triangle CDA autour de la diagonale CA, et faisons-le tourner ensuite autour du point A, de façon à l'amener dans la position indiquée à la figure 1 ; l'angle ξ formé en E est égal (comme on le voit facilement en considérant les triangles CAE et C'AE) à la moitié de δ'

$$\xi = \frac{\delta'}{2} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}.$$

Mais d'autre part

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\delta_1 - \delta_2}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\delta_1 + \delta_2}{2}} = \frac{\sin\delta_1 - \sin\delta_2}{\sin\delta_1 + \sin\delta_2} = \frac{b\sin\alpha - c\sin\gamma}{b\sin\alpha + c\sin\gamma},$$

d'où l'on déduit, en se reportant à l'équation IV,

$$\operatorname{tg}\xi = \operatorname{tg}\frac{\delta'}{2} = \frac{b\sin\alpha - c\sin\gamma}{a + d - b\cos\alpha - c\cos\gamma} = \frac{d - a + b\cos\alpha - c\cos\gamma}{b\sin\alpha + c\sin\gamma}. \quad \text{IX}$$

La première des deux valeurs de tgξ peut se déduire directement du triangle C'CR. Si l'on remarque que dans le quadrilatère en croix, les angles α et γ sont décrits en sens inverse, on peut dire que l'équation IX est identique à l'équation IV, ce qui montre bien que les deux formules de la tangente du demi-angle V et VI, de même que les formules de l'aire qu'on en a déduites sont valables pour tous les quadrilatères, pourvu que l'on tienne compte du sens de description des angles.

Quant à la construction du quadrilatère inscrit, dont j'ai déjà parlé, elle s'appuie sur la détermination du point M.

Dans le cas du quadrilatère inscrit, les côtés BC et DC' sont parallèles (fig. 1) et la ligne Mm est leur moyenne arithmétique. Le point M doit, d'ailleurs, se trouver sur le demi-cercle construit sur AE. On connaît alors les valeurs de Mm et AE

$$Mm = \frac{b \pm c}{2}, \qquad AE = \frac{ac + bd}{b \mp c} \left(b > c\right).$$

Dans le cas d'un quadrilatère quelconque, ces mêmes lignes deviendraient

$$4\overline{Mm}^2 = b^2 + c^2 \mp 2bc\cos(\alpha + \gamma),$$

$$AE = \frac{ac\sin\gamma + bd\sin\alpha - bc\sin(\alpha+\gamma)}{b\sin\alpha \mp c\sin\gamma}.$$

Les signes supérieurs correspondant à la position des triangles de la figure 1, les signes inférieurs à celle qu'on obtient par une rotation en sens inverse.

On verra un emploi analogue de la tangente du demi-angle du quadrilatère, dans les deux problèmes suivants qui, malgré leur simplicité ne manquent pas d'un certain intérêt.

1) Etant donnés, dans un quadrilatère, les côtés et la somme de deux angles opposés, déterminer un quadrilatère circonscrit à un cercle et ayant les mêmes angles et le même périmètre.

2) Avec les mêmes données, calculer les deux quadrilatères inscrits que forment les deux bissectrices extérieures et intérieures des angles du quadrilatère primitif.

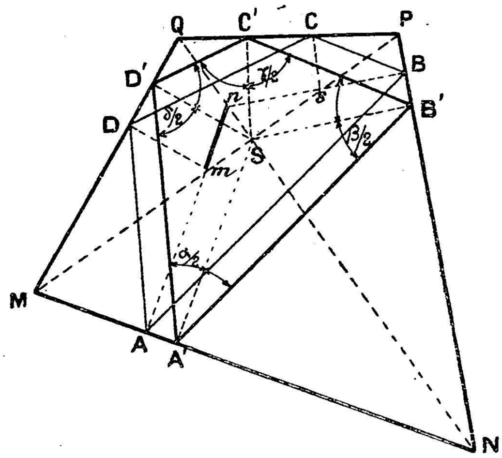

Fig. 2.

Soit la figure 2; soit ABCD le quadrilatère construit d'après les données indiquées. Menons les bissectrices des angles extérieurs, le quadrilatère circonscrit au premier que nous formons ainsi est un quadrilatère inscrit; il est alors facile de démontrer que tout quadrilatère dont les sommets sont sur le quadrilatère extérieur, et les côtés parallèles à ceux du quadrilatère intérieur, a le même périmètre que ce dernier. En effet, il suffit de projeter les plus petits côtés de chaque quadrilatère ABCD et A'B'C'D', sur les côtés de l'autre, qui leur sont parallèles, et l'on reconnaît la justesse de la proposition.

On pourrait d'ailleurs étendre ce théorème aux quadrilatères dont les sommets sont sur les prolongements des côtés du quadrilatère extérieur à condition d'affecter les côtés d'un signe et de considérer seulement la somme algébrique de ces côtés.

Du point d'intersection des diagonales du quadrilatère MNPQ, abaissons des perpendiculaires sur les côtés de celui-ci : les pieds de ces perpendiculaires A′B′C′D′ forment un quadrilatère circonscrit, dont les côtés sont parallèles à ceux du quadrilatère donné ABCD.

1) Le quadrilatère est circonscrit à un cercle, car les perpendiculaires amenées sont les bissectrices des angles A′B′C′D′ ; en effet SA′NB′ et SA′MD′ sont quadrilatères inscrits ; donc $\sphericalangle$ SA′B′ = $\sphericalangle$ SNB′ et $\sphericalangle$ SA′D′ = $\sphericalangle$ SMD′, mais

$$\sphericalangle \mathrm{SNB}' = \sphericalangle \mathrm{QNP} = \sphericalangle \mathrm{QMP} = \mathrm{SMD}',$$

d'où

$$\sphericalangle \mathrm{SA'B'} = \sphericalangle \mathrm{SA'D'}.$$

2) Les côtés sont parallèles à ceux du quadrilatère donné, car les diagonales du quadrilatère inscrit MNPQ bissectent les angles formés par les côtés prolongés de ABCD ; il suit de là que les perpendiculaires élevées, en B et C, par exemple, sur les côtés NP et PQ doivent se couper en un point s de PM ; les triangles BCs et B′C′S sont donc en perspective et comme Cs est parallèle à C′S et Bs parallèle à B′S, BC est également parallèle à B′C′.

Le quadrilatère circonscrit A′B′C′D′ présente, en vertu de la propriété démontrée plus haut, le même périmètre que le quadrilatère ABCD ; nous venons de voir qu'il a les mêmes angles ; il répond donc aux conditions du premier problème.

On trouve alors les formules suivantes où a', b', c', d' désignent les côtés A′B′, B′C′, C′D′, D′A′, et s leur demi-somme,

$$a' = s\,\frac{\cot g\frac{\alpha}{2} + \cot g\frac{\beta}{2}}{\cot g\frac{\alpha}{2} + \cot g\frac{\beta}{2} + \cot g\frac{\gamma}{2} + \cot g\frac{\delta}{2}},$$

$$b' = s\,\frac{\cot g\frac{\beta}{2} + \cot g\frac{\gamma}{2}}{\cot g\frac{\alpha}{2} + \cot g\frac{\beta}{2} + \cot g\frac{\gamma}{2} + \cot g\frac{\delta}{2}},$$

$$c' = s\,\frac{\cot g\frac{\gamma}{2} + \cot g\frac{\delta}{2}}{\cot g\frac{\alpha}{2} + \cot g\frac{\beta}{2} + \cot g\frac{\gamma}{2} + \cot g\frac{\delta}{2}},$$

$$d' = s\,\frac{\cot g\frac{\delta}{2} + \cot g\frac{\alpha}{2}}{\cot g\frac{\alpha}{2} + \cot g\frac{\beta}{2} + \cot g\frac{\gamma}{2} + \cot g\frac{\delta}{2}}.$$

L'aire du quadrilatère A'B'C'D' sera donnée (1) par :

$$\mathfrak{I} = s\rho = \frac{s^2}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}}.$$

Le premier problème se trouvant ainsi complètement résolu, il suffira pour le deuxième de faire les remarques suivantes :

On peut déterminer directement les côtés du quadrilatère inscrit extérieur au moyen des bissectrices des angles du quadrilatère circonscrit, ceux du quadrilatère inscrit intérieur au moyen des bissectrices du quadrilatère primitif ABCD. Pour ces derniers, on calculera les longueurs interceptées par les diagonales PM et NQ ; on soustraira donc, par exemple,

$Am = SA'\frac{d}{d'}$ de $An = SA'\frac{a}{a'}$, et l'on aura

$$mn = SA'\left(\frac{a}{a'} - \frac{d}{d'}\right) = \frac{s}{\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}\right)} \frac{ad' - a'd}{a'd' \sin\frac{\alpha}{2}}$$

L'aire des deux quadrilatères inscrits s'obtient également d'une façon très simple; on fera la somme des triangles formés extérieurement, pour le premier (intérieurement pour le second) et on ajoutera à cette première somme (ou l'on retranchera de la seconde) l'aire du quadrilatère ABCD.

FRANZ REDL (Viehofen, Autriche).

Traduit de l'allemand par H. Duaime (Genève).

---

(1) On obtient une deuxième expression pour l'aire en partant de la formule :

$$\mathfrak{I} = \sqrt{a'b'c'd'} \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} ;$$

c'est la suivante

$$\mathfrak{I} = \frac{s^2}{\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}}$$

En comparant ces deux expressions de l'aire, on arrive à une relation trigonométrique bien connue.