

# REMARQUES DIDACTIQUES GÉNÉRALES A PROPOS DU LIEU DES POINTS M DONT LE RAPPORT DES DISTANCES A DEUX POINTS FIXES B ET C EST DONNÉ

Autor(en): **Lemoine, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4664>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REMARQUES DIDACTIQUES GÉNÉRALES

A PROPOS DU LIEU DES POINTS M

DONT LE RAPPORT DES DISTANCES A DEUX POINTS FIXES B ET C  
EST DONNÉ

---

Ce lieu se trouve établi dans les traités de Géométrie les plus élémentaires et son importance justifie la place qui lui est toujours réservée. Il n'en est que plus choquant et surtout plus *dangereux* pour l'éducation de l'esprit des élèves de voir qu'il est toujours aussi énoncé et démontré sans précision, ce qui permet d'ailleurs à toutes les démonstrations données d'être incomplètes sans que cela saute aux yeux.

Quelques mots d'explication sont nécessaires pour justifier cette critique.

Tant que l'on a fait de la Géométrie, exactement comme l'entendait Euclide, la démonstration du lieu en question était irréprochable, mais dès que l'on eut établi le principe des signes sur une droite, c'est-à-dire que si D et D' sont deux points de cette droite, l'on a  $DD' = -D'D$ , l'incorrection de la démonstration séculaire eut dû frapper les géomètres. En effet, par exemple, examinons ce qui est dit sur ce lieu dans l'excellent *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, l'ouvrage qui depuis quarante ans a fait l'éducation de presque tous les géomètres français ; on y lit (7<sup>e</sup> édition, p. 127) :

THÉORÈME

« *Le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné, est une circonférence.*

« Soient B et C les deux points fixes,  $\frac{m}{n}$  le rapport donné et M un

« point quelconque du lieu, c'est-à-dire un point tel qu'on ait  
 «  $\frac{MB}{MC} = \frac{m}{n}$ . Il existe d'abord sur la droite indéfinie BC deux  
 « points du lieu, c'est-à-dire deux points D et D' qui satisfont aux  
 « relations

$$« \quad \frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}, \quad \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n} . \text{ etc. } »$$

Non cela n'est pas exact ; ce qu'il y a c'est un point D entre B et C (si nous supposons  $\frac{m}{n}$  positif) tel que  $\frac{DB}{DC} = -\frac{m}{n}$  et un point D' hors du segment BC tel que  $\frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n}$ . Toute la démonstration continue dans le même esprit.

Je n'incrimine pas les auteurs, ils diraient avec justesse que jusqu'à cette proposition dans leur ouvrage, ils avaient fait de la Géométrie comme Euclide et ne s'occupaient pas du sens des grandeurs <sup>(1)</sup> et qu'ils avaient mis la proposition à la place que lui assignent les programmes d'études. Je n'aurais rien à répondre, mais il n'en est que plus indispensable de faire remarquer que la science a marché et que ces programmes, base de toute notre éducation scientifique, doivent sous peine d'incohérence être modifiés dans le sens de l'esprit nouveau pour ne nécessiter jamais de retour inutile sur des points censés établis.

Ainsi je suppose que cette démonstration soit conservée telle quelle ; elle entre dans les notions acquises de l'élève qui a cru *nettement* comprendre. Plus tard il s'apercevra qu'il n'a pas bien compris parce qu'un tour de prestidigitation, pour ainsi dire, lui a simplement caché les choses.

S'il ne s'en aperçoit point de lui-même, il faudra que le maître recommence la démonstration avec rigueur cette fois (sans cela l'élève garderait des idées incomplètes) et c'est une singulière méthode didactique, d'établir d'abord un théorème d'une façon telle que les notions acquises par l'élève ne lui permettent pas de voir son inexactitude, puis de lui montrer deux mois après

---

(<sup>1</sup>) Cependant la chose n'est qu'à moitié vraie, car s'il n'en a point été question dans la partie en gros caractères consacrée au développement strict des programmes officiels, dans l'Appendice du livre II, la notion de sens est constamment introduite explicitement.

qu'on avait trompé sa candeur. Outre le trouble d'esprit et la perte du temps qu'imposent ces retours, le procédé est de nature à ébranler la confiance de l'élève dans les démonstrations qu'on lui donne après cela, car il peut se demander si quelque chose qu'il ignore ne viendra pas encore infirmer ce qu'il croit enfin démontré rigoureusement.

Le défaut inhérent à cette démonstration, de ne pouvoir être adoptée logiquement que si l'idée de sens ne faisait point partie de la Géométrie, pouvait donc apparaître dès que le principe des signes *sur une droite* a été admis, puisque  $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$  est, *en l'es- pèce*, une égalité contradictoire; la démonstration est restée cependant, parce que toutes les conséquences logiques d'un principe nouveau ne se développent jamais rapidement et que, au lieu d'exposer la Géométrie dans ses éléments en y introduisant les modifications nécessaires, on a continué les anciens errements. Il en est résulté que les questions sont traitées tantôt sans le principe des signes, tantôt en l'introduisant dans celles où il est impossible de faire autrement. Pour ceux qui bornent leurs études à l'enseignement classique sans les poursuivre dans la vie et sans jamais les appliquer, BC est égal à — BC et représente *la distance* des deux points comme on l'entend vulgairement en parlant de la distance d'un arbre à un autre arbre. J'accorde que, *dans ce cas*, la chose n'a pas grand inconvénient puisque ces notions restent inutiles, mais cependant, il est évident qu'il vaudrait mieux qu'elles fussent données d'une façon correcte et ce ne serait, en s'y prenant à l'origine, ni long ni difficile, car l'addition à faire est de l'ordre de difficultés qu'il y a à faire comprendre que d'aller de Paris à Lyon ou d'aller de Lyon à Paris même par la même route, sont des choses essentiellement différentes. Les géomètres eux ne se trompent plus sur ce point maintenant, c'est clair, mais il est curieux de voir combien l'esprit est long à généraliser les nouveautés les plus simples lorsqu'elles poussent sur le chemin des idées reçues, transmises didactiquement de générations en générations et qu'elles tendent à les modifier; ainsi aujourd'hui, quoique pour toute la Géométrie plane, la généralisation de la règle des signes soit établie au moins depuis quelque trente ans, quoiqu'elle ait une impor-

tance primordiale, rien n'est changé à l'exposition des premiers principes qu'elle perfectionnera cependant fatalement d'une façon profonde quand elle y sera à sa place ; la plupart des maîtres élémentaires semblent l'ignorer sauf pour les questions où elle s'impose, car ils continuent à traiter les autres comme si elle n'existait pas. Il a fallu longtemps pour que, une fois mis en lumière, le principe des signes sur une droite devienne d'un usage courant parmi les géomètres, il a fallu longtemps encore pour généraliser cette idée de sens dans la Géométrie ; Chasles par exemple qui a tant usé du principe des signes *sur une droite*, non seulement ne l'a pas aperçue ailleurs, mais il déclarait même (Préface de la *Géométrie supérieure*, p. ix) que le principe des signes n'était point applicable aux théorèmes de Géométrie se rapportant à des grandeurs comptées sur des droites différentes ; aussi il a compliqué par la discussion de tous les cas possibles de position un grand nombre de questions dont la démonstration devait être générale (Voir Laguerre, N. A., 1870, p. 175 et suiv.). Laguerre — si simple que la chose soit en elle-même — est le premier, je crois, qui ait énoncé *loco citato* que « lorsqu'un « théorème relatif à des segments et à des angles situés d'une « façon quelconque dans un plan est *convenablement et complète-* « *ment énoncé*, il doit toujours comporter la règle des signes ».

Du reste, à chaque instant on est amené à des propositions dont l'énoncé ne peut avoir de précision qu'avec la règle des signes, et les inconséquences provenant de la première éducation mathématique qui a formé le bagage des connaissances dont on dispose, rendent un examen nécessaire, obligent à des conventions de signes spéciales à chaque cas, pour s'en rendre compte au lieu de voir la chose ressortir immédiatement du calcul, aussi *évidemment* qu'elle ressort quand le résultat est de porter sur une ligne à partir d'un point O de cette ligne, une longueur OX donnée par  $OX^2 = a^2$ ,  $a$  étant une longueur connue. Je ne peux mieux me faire comprendre qu'en citant, au hasard, le dernier exemple de cette nature qui s'est présenté à moi, il y a quelques jours. J'appelle  $\lambda$  le second point du cercle circonscrit à un triangle ABC situé sur la ligne qui joint le barycentre au point de Tarry, A'B'C' les sommets du triangle podaire de  $\lambda$ , c'est-à-dire les pieds des perpendiculaires abaissées de  $\lambda$  sur les côtés

du triangle; on démontre facilement comme il suit que  $x, y, z$  désignant les coordonnées normales de  $\lambda$  et  $R_a, R_b, R_c$  les rayons des cercles circonscrits aux triangles  $AB'C', BC'A', CA'B'$ , on a :

$$x^2 R_a^2 = y^2 R_b^2 = z^2 R_c^2.$$

En effet on trouve que les coordonnées normales de  $\lambda$  sont :

$$\frac{a}{b^2 - c^2}, \frac{b}{c^2 - a^2}, \frac{c}{a^2 - b^2}$$

on calcule  $A\lambda^2$  et l'on trouve

$$\overline{A\lambda^2} = \frac{b^2 c^2 (b^2 - c^2)^2}{\Sigma(c^2 - a^2)(b^2 - a^2)a^2}, \quad \overline{B\lambda^2} = \text{etc.}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\overline{A\lambda^2} a^2}{(b^2 - c^2)^2} = \frac{\overline{B\lambda^2} b^2}{(c^2 - a^2)^2} = \frac{\overline{C\lambda^2} c^2}{(a^2 - b^2)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{A\lambda^2}}{x^2} = \frac{\overline{B\lambda^2}}{y^2} = \frac{\overline{C\lambda^2}}{z^2}.$$

D'ailleurs par une propriété générale du triangle podaire d'un point A on a :

$$\frac{\overline{A\lambda^2} \sin^2 A}{B'C'^2} = \frac{\overline{B\lambda^2} \sin^2 B}{C'A'^2} = \frac{\overline{C\lambda^2} \sin^2 C}{A'B'^2}$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{x^2 \sin^2 A}{B'C'^2} = \frac{y^2 \sin^2 B}{C'A'^2} = \frac{z^2 \sin^2 C}{A'B'^2}$$

mais comme dans le triangle  $AB'C'$  on a

$$\frac{B'C'}{\sin A} = 2R_a \text{ etc.}$$

il vient :

$$x^2 R_a^2 = y^2 R_b^2 = z^2 R_c^2, \text{ c. q. f. d.}$$

Il est clair que l'on ne peut en déduire  $xR_a = yR_b = zR_c$  que si les signes de  $R_a, R_b, R_c$  sont aussi bien définis que ceux de  $x, y, z$ .

On peut objecter qu'une autre démonstration géométrique où les carrés d'aucune ligne n'entreraient en cause, permettrait d'établir rigoureusement le théorème. Ce n'est d'abord pas exact car le résultat final ne peut avoir la généralité et la précision

qu'il comporte que si les signes des  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$  sont définis, ensuite cela n'infirmait en rien les conclusions à tirer de l'indétermination des signes que l'on trouve en suivant la marche qui s'est présentée à moi. Il est donc nécessaire que la Géométrie soit exposée dès les éléments de façon à ce que toute ligne tracée ait son signe déterminé par des conventions générales toujours présentes à l'esprit du géomètre, qui soient pour lui devenues comme intuitives parce qu'elles se trouvaient à la base de toute sa connaissance géométrique depuis l'origine. Cela rendrait inutile la discussion des signes des résultats, quelquefois délicate.

Je crois d'ailleurs, sans pouvoir la donner, qu'il y a une règle générale, en Géométrie plane, qui lie, par rapport aux signes à adopter pour eux, tous les éléments d'une question géométrique quelconque. La découverte de ce principe serait d'une utilité primordiale en évitant les conventions qu'on est obligé de rechercher pour chaque cas particulier.

Pour me faire mieux comprendre je citerai encore un exemple.

Soit  $ABDC$  un quadrilatère inscrit convexe, les lettres se suivant dans cet ordre sur la circonférence; les diagonales  $BC$  et  $AD$  sont désignées par  $a$  et  $x$  et les côtés  $AB$ ,  $BD$ ,  $DC$ ,  $CA$  par  $c$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $b$  respectivement; les deux théorèmes principaux sur le quadrilatère inscriptible s'écriront ainsi

$$ax = by + cz \text{ et } \frac{x}{a} = \frac{bc + yz}{cy + bz}$$

et pas plus sous cette forme que sous la forme des énoncés classiques qu'elle traduit, on ne voit immédiatement comment le principe des signes s'y applique.

Par une courte recherche on voit qu'ils pourront s'énoncer ainsi. *Si  $A, B, D, C$  sont quatre points d'un cercle (quel que soit l'ordre de succession des points sur le cercle), on a*

$$DA.BC + DB.CA + DC.AB = 0$$

et

$$\frac{BC}{DA} + \frac{CA}{DB} + \frac{AB}{DC} + \frac{BC.CA.AB}{DA.DB.DC} = 0.$$

Mais il faut faire la convention que les côtés du triangle  $ABC$ .

ont un signe, le sens BC, CA, AB donnant par exemple le signe positif et que DA, DB, DC ont le même signe que les coordonnées normales du point D, ABC étant le triangle de référence.

Le résultat est donc obtenu, mais j'ignore quelle est la loi qui doit faire choisir les conventions qui le donnent.

On pourrait objecter que les formes sous lesquelles je viens d'énoncer ces théorèmes sont didactiquement à rejeter, parce qu'elles se retiennent moins, parlent moins à l'esprit pour ainsi dire. La chose est exacte avec le système pédagogique adopté, mais c'est ce système que je critique et elle ne le serait plus si, dès les premiers mots de Géométrie, la notion du signe était inséparable, en fait, de la considération des grandeurs dans les figures.

Pour ce qui est de l'espace, on sait maintenant aussi déterminer le signe des volumes, mais on peut dire, en dehors de cela, que l'on ne sait point, en général, y appliquer la règle des signes; il se pourrait même qu'elle ne s'y appliquât pas sans modifications. Il me semble presque certain cependant qu'il y a pour les faits de l'espace une loi plus générale à découvrir dont le principe des signes serait un cas particulier.

Pour revenir à la question de Géométrie élémentaire qui a été le prétexte de ces observations, je dirai que pour rendre la démonstration classique moins choquante, il suffirait bien de spécifier qu'on ne parle que des longueurs absolues des lignes, mais ce ne serait point de bonne pédagogie, en effet on n'a parlé jusque-là que des longueurs absolues des lignes et à moins de développements qui ne seraient que l'établissement du principe des signes, l'élève comprendrait mal ce que cette restriction veut dire. Le défaut n'existerait pas si le principe des signes avait accompagné, à l'origine, la définition de la longueur d'un segment.

*Si je suppose les choses faites ainsi, voici l'énoncé et l'esquisse d'une démonstration qui me semblent sans reproche. Le lieu géométrique des points M dont les distances à deux points donnés B et C sont dans le rapport des deux longueurs m et n données, est une circonférence.*

Il y a deux cas à examiner : 1° les longueurs  $m$  et  $n$  ont le même signe ; 2° elles ont des signes contraires.

1<sup>er</sup> cas. On peut considérer  $m$  et  $n$  comme toutes deux posi-



tives. Si l'on suppose que M soit un point du lieu, que l'on mène la bissectrice intérieure MD et la bissectrice extérieure MD' du triangle BCM, que le sens BCM soit le sens positif, on a

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{D'C}}{\overline{D'B}}.$$

Par suite si l'on détermine entre B et C le point D tel que  $\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{m}{n}$  et à l'extérieur de BC le point D' tel que  $\frac{\overline{D'C}}{\overline{D'B}} = \frac{m}{n}$ , tout point M sera sur la circonférence décrite sur DD' comme diamètre.

On démontrerait avec la même précision que tout point de cette circonférence est un point du lieu.

La démonstration du deuxième cas n'offre pas plus de difficulté, car on a :

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \text{ (négatif)} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}$$

et

$$\frac{\overline{CD'}}{\overline{D'B}} \text{ (négatif)} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}} \text{ etc.}$$

E. LEMOINE (Paris).

## SUR QUELQUES CONSTRUCTIONS NOUVELLES DE LA PARABOLE

Si nous employons les théorèmes de la Géométrie projective, qui résultent de la théorie des polaires réciproques de Poncelet, et si nous prenons en considération les théorèmes connus de Steiner, Reye, etc., nous pourrons construire une parabole d'une manière très simple en nous aidant d'un cercle fixe. Les constructions de cette nature nous permettent de tenir compte des rapports absolument métriques, et de les subordonner aux propriétés projectives.