

SUR LES POLYGONES DE PONCELET

Autor(en): **Lelievre, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4643>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LES POLYGONES DE PONCELET

Le problème des polygones de Poncelet ⁽¹⁾ conduit naturellement à la question suivante :

Une relation biquadratique symétrique déterminant une infinité de polygones de m côtés, inscrits dans une unicursale C , forme l'équation générale de degré m qui a pour racines les paramètres t des m sommets de l'un de ces deux polygones.

On observe aussitôt que cette équation doit pouvoir dépendre linéairement d'un paramètre λ , de façon à être déterminée complètement et d'une manière unique par la donnée d'une seule racine t_0 ; c'est ce qui a été vérifié ⁽²⁾. On peut le constater simplement de la façon suivante :

Nous savons que l'on peut toujours faire en sorte que les paramètres des m sommets d'un polygone considéré soient : pu , $p(u + \mathcal{C})$, ... $p[u + (m - 1)\mathcal{C}]$, avec la condition : $m\mathcal{C} \equiv 0$; l'équation correspondante que l'on veut former est :

$$F(t, a) = [t - pu][t - p(u + \mathcal{C})][t - p(u + 2\mathcal{C})] \dots [t - p(u + (m - 1)\mathcal{C})] = 0$$

En vertu de $m\mathcal{C} \equiv 0$, on voit immédiatement que l'on a identiquement, quel que soit l'entier k : $F(t, u + k\mathcal{C}) \equiv F(t, u)$. Regardons alors F comme une fonction elliptique de u , aux mêmes périodes que pu ; elle aura les pôles doubles congrus à \mathcal{C} , $-\mathcal{C}$, $-2\mathcal{C}$, ... $-(m - 1)\mathcal{C}$; décomposons-la en éléments simples, et pour cela considérons son développement, par rapport aux puissances croissantes de u , par exemple; il sera de la forme :

$$F(t, u) = \frac{A}{u^2} + \frac{B}{u} + F_1(u)$$

⁽¹⁾ Voir un précédent article, numéro du 15 novembre 1899.

⁽²⁾ Voir une note de M. R. Bricard au *Bulletin de la Société mathématique*, 1898, p. 93. Je propose ici une démonstration plus simple.

F_1 étant une fonction entière de u ; d'où, en vertu de la remarque ci-dessus :

$$F(t, u + K\mathcal{C}) = \frac{A}{(u + K\mathcal{C})^2} + \frac{B}{u + K\mathcal{C}} + F_1(u + K\mathcal{C}).$$

De sorte que F a même résidu B par rapport à tous ses pôles ; la somme des résidus étant nulle, on aura $B = 0$; A sera aussi le même pour tous les pôles :

$$A = \lim_{u=0} u^2 F(t, u);$$

d'où :

$$A = - (t - p\mathcal{C}) (t - p^2\mathcal{C} \dots (t - p(m-1)\mathcal{C}) = f(t).$$

D'où la décomposition cherchée :

$$F(t, u) = f(t) [pu + p(u + \mathcal{C}) \dots + p[u + (m-1)\mathcal{C}]] + \varphi(t)$$

en désignant par $\varphi(t)$ un polynôme indépendant de u , qu'on pourra expliciter en attribuant à u une valeur particulière. Donc en appelant λ la somme des paramètres des m sommets, l'équation générale demandée sera :

$$(1) \quad \varphi(t) + \lambda f(t) = 0,$$

$\varphi(t)$ et $f(t)$ désignant les polynômes correspondants à deux solutions particulières, et pouvant être remplacés par deux quelconques de l'ensemble (1) obtenu quand λ varie (en particulier, $f(t)$ doit être regardé comme ayant une racine t infinie). Ainsi les m sommets des polygones de Poncelet considérés forment bien sur la courbe C une involution d'ordre m .

Remarque. — Réciproquement, toute équation de la forme (1) et de degré quelconque m , ne détermine pas généralement, quand λ varie, des polygones de Poncelet inscrits dans la courbe : car l'élimination de λ entre les deux équations : $\varphi(x) + \lambda f(x) = 0$, $\varphi(y) + \lambda f(y) = 0$ montre que les paramètres x et y de deux sommets quelconques d'un des polygones déterminés par (1) satisfont à la relation symétrique :

$$\frac{f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x)}{x - y} = 0$$

qui est d'ordre $m - 1$ par rapport à chaque paramètre x ou y : elle se transforme en une relation d'ordre $m - 1$ entre $S = x + y$ et $P = xy$, qui s'obtient d'ailleurs facilement sous forme de déterminant, en écrivant, par la méthode d'identification, que $t_2 - St + P$ est diviseur de $\varphi(t) + \lambda f(t)$.

Géométriquement, si la courbe C est une conique, cela revient à dire que les cordes de l'involution (1) enveloppent une ligne de classe $m - 1$. Dès que m surpasse 3, ce n'est qu'exceptionnellement que cette enveloppe se décomposera en deux autres, dont l'une F serait de seconde classe : il sera, pour cela, nécessaire et suffisant que les côtés de deux polygones de m côtés déterminés par $f = 0$, $\varphi = 0$ soient à la fois tangents à une même conique.

Cas particulier de $m = 3$. — Dans ce cas, l'équation (1) détermine toujours, quels que soient f et φ , des triangles inscrits dans la conique C et circonscrits à une conique F , qui reste fixe quand λ varie : cela est, du reste, à prévoir, puisqu'on peut toujours, comme on sait, inscrire une conique F à la fois dans les deux triangles déterminés par $f = 0$ et $\varphi = 0$. De là résultent finalement la plupart des lieux géométriques relatifs aux triangles inscrits dans une conique C et circonscrits à une autre (1).

M. LELIEUVRE (Caen).

(1) Voir, à ce sujet, une note de M. Fontené, *Revue de Math. spéciales*, avril 1900.