SUR LES POLYGONES DE PONCELET

Autor(en): **Lelieuvre, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4643

SUR LES POLYGONES DE PONCELET

Le problème des polygones de Poncelet ([1]) conduit naturellement à la question suivante :

Une relation biquadratique symétrique déterminant une infinité de polygones de m *côtés, inscrits dans une unicursale C, forme l'équation générale de degré* m *qui a pour racines les paramètres* t *des* m *sommets de l'un de ces deux polygones.*

On observe aussitôt que cette équation doit pouvoir dépendre *linéairement* d'un paramètre λ, de façon à être déterminée complètement et d'une manière unique par la donnée d'une seule racine t_0 ; c'est ce qui a été vérifié ([2]). On peut le constater simplement de la façon suivante :

Nous savons que l'on peut toujours faire en sorte que les paramètres des m sommets d'un polygone considéré soient : pu, $p(u+\mathcal{C})$, ... $p[u+(m-1)\mathcal{C}]$, avec la condition : $m\mathcal{C} \equiv 0$; l'équation correspondante que l'on veut former est :

$$F(t, a) = [t - pu][t - p(u+\mathcal{C})][t - p(u+2\mathcal{C})]\ldots[t - p(u+(m-1)\mathcal{C}] = 0$$

En vertu de $m\mathcal{C} \equiv 0$, on voit immédiatement que l'on a identiquement, quel que soit l'entier k : $F(t, u + k\mathcal{C}) \equiv F(t, u)$. Regardons alors F comme une fonction elliptique de u, aux mêmes périodes que pu ; elle aura les pôles doubles congrus à $\mathcal{C}, -\mathcal{C}, -2\mathcal{C} \ldots -(m-1)\mathcal{C}$; décomposons-la en éléments simples, et pour cela considérons son développement, par rapport aux puissances croissantes de u, par exemple ; il sera de la forme :

$$F(t, u) = \frac{A}{u^2} + \frac{B}{u} + F_1(u)$$

([1]) Voir un précédent article, numéro du 15 novembre 1899.

([2]) Voir une note de M. R. Bricard au *Bulletin de la Société mathématique*, 1898, p. 93. Je propose ici une démonstration plus simple.

F_1 étant une fonction entière de u ; d'où, en vertu de la remarque ci-dessus :

$$F(t, u + K\mathcal{T}) = \frac{A}{(u + K\mathcal{T})^2} + \frac{B}{u + K\mathcal{T}} + F_1(u + K\mathcal{T}).$$

De sorte que F a même résidu B par rapport à tous ses pôles ; la somme des résidus étant nulle, on aura $B = 0$; A sera aussi le même pour tous les pôles :

$$A = \lim_{u=0} u^2 F(t, u) ;$$

d'où :

$$A = -(t - p\mathcal{T})(t - p2\mathcal{T} \ldots (t - p(m-1)\mathcal{T} = f(t).$$

D'où la décomposition cherchée :

$$F(t, u) = f(t)[pu + p(u + \mathcal{T}) \ldots + p[u + (m-1)\mathcal{T}] + \varphi(t)$$

en désignant par $\varphi(t)$ un polynôme indépendant de u, qu'on pourra expliciter en attribuant à u une valeur particulière. Donc en appelant λ la somme des paramètres des m sommets, l'*équation générale demandée sera :*

$$\varphi(t) + \lambda f(t) = 0, \tag{1}$$

$\varphi(t)$ et $f(t)$ désignant les polynômes correspondants à deux solutions particulières, et pouvant être remplacés par deux quelconques de l'ensemble (1) obtenu quand λ varie (en particulier, $f(t)$ doit être regardé comme ayant une racine t infinie). *Ainsi les* m *sommets des polygones de Poncelet considérés forment bien sur la courbe* C *une involution d'ordre* m.

Remarque. — Réciproquement, toute équation de la forme (1) et de degré quelconque m, ne détermine pas généralement, quand λ varie, des polygones de Poncelet inscrits dans la courbe : car l'élimination de λ entre les deux équations : $\varphi(x) + \lambda f(x) = 0$, $\varphi(y) + \lambda f(y) = 0$ montre que les paramètres x et y de deux sommets quelconques d'un des polygones déterminés par (1) satisfont à la relation symétrique :

$$\frac{f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x)}{x - y} = 0$$

qui est d'ordre $m - 1$ par rapport à chaque paramètre x ou y : elle se transforme en une relation d'ordre $m - 1$ entre $S = x + y$ et $P = xy$, qui s'obtient d'ailleurs facilement sous forme de déterminant, en écrivant, par la méthode d'identification, que $t_2 - St + P$ est diviseur de $\varphi(t) + \lambda f(t)$.

Géométriquement, si la courbe C est une conique, cela revient à dire que les *cordes de l'involution* (1) *enveloppent une ligne de classe* $m - 1$. Dès que m surpasse 3, ce n'est qu'exceptionnellement que cette enveloppe se décomposera en deux autres, dont l'une F serait de seconde classe : il sera, pour cela, nécessaire et suffisant que les côtés de deux polygones de m côtés déterminés par $f = 0$, $\varphi = 0$ soient à la fois tangents à une même conique.

Cas particulier de $m = 3$. — Dans ce cas, l'équation (1) détermine *toujours*, *quels que soient* f et φ, des triangles inscrits dans la conique C et circonscrits à une conique F, qui reste fixe quand λ varie : cela est, du reste, à prévoir, puisqu'on peut toujours, comme on sait, inscrire une conique F *à la fois* dans les deux triangles déterminés par $f = 0$ et $\varphi = 0$. De là résultent finalement la plupart des lieux géométriques relatifs aux triangles inscrits dans une conique C et circonscrits à une autre [1].

M. Lelieuvre (Caen).

---

[1] Voir, à ce sujet, une note de M. Fontené, *Revue de Math. spéciales*, avril 1900.