TRANSFORMATION DES COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

Autor(en): **Laisant, C.-A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4650

ments étant rangés dans chaque terme de Δ suivant l'ordre des lignes, et m étant de même parité que le nombre des *inversions* de la permutation d'indices $p, q \ldots s$: il suffit, en effet, d'admettre cette règle de formation du multiplicateur $(-1)^m$ pour l'ordre $n-1$, et de l'appliquer dans (1) aux α_i qui sont de cet ordre, pour l'établir aussitôt relativement à l'ordre n.

M. LELIEUVRE (Caen).

TRANSFORMATION

DES COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

Plusieurs correspondants m'ont manifesté le désir de connaître des formules simples permettant de passer d'un triangle de référence à un autre (ou d'un tétraèdre à un autre) en coordonnées homogènes trilinéaires ou tétraédriques. La question, en ce qui concerne les coordonnées barycentriques, est d'une telle simplicité que je la crois classique ; mais par cela même qu'elle a été posée, c'est qu'il peut y avoir un intérêt à faire connaître une réponse. C'est cette seule considération qui m'engage à publier la présente Note, où j'emploie les vecteurs pour l'établissement des formules dont il s'agit. Il est facile de voir qu'on y parviendrait aussi, mais moins rapidement, par l'emploi pur et simple des coordonnées cartésiennes.

Je me borne au cas des coordonnées trilinéaires, l'extension à l'espace (coordonnées tétraédriques) étant toute naturelle.

Soient : ABC un triangle de référence ; x, y, z les coordonnées barycentriques d'un point M par rapport à ABC ; A_1 A_2 A_3 un second triangle donné. Il s'agit de trouver les coordonnées x', y', z' de M par rapport à ce second triangle de référence.

Appelons α_1, β_1, γ_1 les coordonnées de A_1 ; α_2, β_2, γ_2 celles de A_2 ; α_3, β_3, γ_3 celles de A_3 par rapport à ABC ; et supposons qu'on ait :
$x + y + z = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \alpha_3 + \beta_3, + \gamma_3 = 1,$

ce qui est toujours permis, puisque les coordonnées sont homogènes.

En prenant une origine commune quelconque O, et appelant A, B,... les vecteurs OA, OB,... on a les relations

$$\begin{aligned} M &= xA + yB + zC, \\ A_1 &= \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C, \\ A_2 &= \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C, \\ A_3 &= \alpha_3 A + \beta_3 B + \gamma_3 C. \end{aligned}$$

Eliminons A, B, C entre ces quatre équations linéaires, et il vient

$$\begin{vmatrix} M & x & y & z \\ A_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ A_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ A_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$M \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - A_1 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \pi_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - A_3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = A_1 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} + A_3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Les coordonnées barycentriques de M par rapport au triangle de référence $A_1\,A_2\,A_3$ sont donc, comme il s'agit de coordonnées homogènes,

$$x' = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad y' = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}, \quad z = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

On peut aussi écrire, et peut-être de préférence

$$x' = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad y' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ x & y & z \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad z' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Comme application très simple, supposons que A_1, A_2, A_3, soient les centres des cercles exinscrits au triangle ABC; alors

$\alpha_1 = \frac{-a}{2(p-a)}$, $\beta_1 = \frac{b}{2(p-a)}$, $\gamma_1 = \frac{c}{2(p-a)}, \ldots$ et l'on obtient

$$x' = \frac{1}{4(p-b)(p-c)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix} = \frac{a}{2(p-b)(p-c)}(cy+bz), \ldots$$

ou, plus simplement, en remplaçant ces résultats par des quantités proportionnelles,

$$x' = (p-a)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right),$$

$$y' = (p-b)\left(\frac{z}{c}+\frac{x}{a}\right),$$

$$z' = (p-c)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

On pourrait déduire par exemple de là l'équation générale des coniques passant par les centres des trois cercles exinscrits à ABC, et divers autres résultats faciles à obtenir et sur lesquels il nous semble inutile d'insister.

C.-A. Laisant.

NOTE SUR L'EMPLOI DU SYMBOLE 1_θ

DANS LA RECHERCHE

DES FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

1. Le rôle important que joue la quantité complexe de la forme $p+qi$ a fait comprendre à ceux qui s'occupent d'enseignement que l'étude de ces quantités devait se faire par le jeune mathématicien dès le début de ses études. Aussi leur étude est déjà inscrite depuis longtemps au programme des cours de mathématiques spéciales.

On sait que l'on peut mettre une telle quantité sous la forme $r(\cos a + i \sin a)$, r étant son module, a son argument. On con-