BIBLIOGRAPHIE

Franscesco Brioschi. — **Opere Matematiche** : pubblicate per Cura del Comitato per le Onoranze a Francesco Brioschi (G. Ascoli, E. Beltrami, G. Colombo, La Cremona, G. Negri, C. Schiaparelli). — Tomo Primo, con Ritratto di F. Brioschi; gr. in-4°, xii-416 p.; Ulr. Hœpli, Milano, 1901.

Ce premier volume des *œuvres complètes* de Fr. Brioschi renferme les travaux que publia le célèbre mathématicien italien dans les *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* de Tortolini et dans les *Annali di Matematiche pura ed applicata.* Nous ne pouvons songer à donner ici une analyse de ces mémoires qui touchent aux domaines les plus divers des sciences mathématiques. Brioschi a, en effet, dès ses premiers travaux, témoigné un égal intérêt pour la Géométrie et l'Algèbre supérieures, pour l'analyse et la Mécanique. Son œuvre est considérable, elle embrasse la plupart des théories modernes dont se sont occupés les mathématiciens de la seconde moitié du xix^e siècle.

On constate déjà dans ce volume cette variété dans les recherches qui est caractéristique dans l'œuvre du grand géomètre italien. Signalons ses mémoires sur la théorie des surfaces, sur les courbes tautochrones; puis ses nombrueuses recherches dans le domaine de la théorie des formes. Complétant et continuant les travaux de Cayley, Sylvestre et Hermite, il fut, au commencement de la seconde moitié du xviii^e siècle, celui qui, avec ces derniers, a le plus contribué à développer cette importante théorie. Entre autres mémoires relatifs à cette théorie, on trouvera dans ce volume la remarquable monographie consacrée à la théorie des covariants et des invariants d'une forme binaire et ses applications. Ce volume contient également les premières recherches de Brioschi dans le domaine des fonctions abéliennes et elliptiques, recherches qui furent le point de départ d'une série de beaux travaux relatifs à la résolution des équations du cinquième et du sixième degré.

Quant à la partie matérielle de l'ouvrage, la commission de publication et ses collaborateurs y ont apporté tout le soin désirable. Nous ne doutons pas que grâce au bienveillant appui des nombreux élèves et admirateurs de Brioschi cette publication ne pourra être rapidement menée à bonne fin. Elle constitue le monument à la fois le plus digne et le plus durable qui ait pu être élevé à la mémoire du savant géomètre.

H. Fehr.

E. Lemoine. — **Géométrographie, ou art des constructions géométriques.** Collection *Scientia*, n° 18; un vol. de 87 p., in-8° écu. Prix : 2 fr. Paris, C. Naud, éditeur, 1902.

La Géométrie a été dans ses origines et dans le premier état de son développement une science exclusivement pratique; on ne doit donc s'étonner si, pendant son enfance, le seul but que se proposèrent les géomètres ait été de résoudre, de quelque manière que ce fût, les problèmes que les astronomes et les arpenteurs leur proposaient.

Par quelle voie et par mérite de qui la géométrie se soit radicalement transformée et soit devenue par conséquence la science pure, dont les ouvrages des mathématiciens grecs nous offrent clairement les traits séduisants, c'est une chose que l'histoire est impuissante de dire aujourd'hui et que peut-être elle ne sera jamais en mesure de nous apprendre. Cette transfiguration une fois admise, si on se souvient que le but constant et suprême de la science consiste à déduire toutes les vérités d'un certain nombre *minimum* de principes, on n'aura aucune peine à concevoir que les mathématiciens, de même qu'ils s'efforcèrent de bâtir toute la géométrie *théorique* sur une petite collection de vérités primordiales, se soient proposé de faire dépendre toute la géométrie *constructive* d'un groupe, le moins nombreux possible, de constructions fondamentales. Et, après des recherches, dont toute trace est à jamais effacée, on choisit comme telles le tracé des droites et la description des circonférences; conformément à cette décision on considère légitime seulement l'usage des instruments à l'aide desquels on peut construire ces deux lignes, c'est-à-dire la règle et le compas. Ces deux lignes, comme ces deux instruments, ont chacune des qualités particulières. La droite apparaît aux yeux du théoricien comme la ligne supérieure, pour sa simplicité, à toute autre; d'où le désir de bannir le cercle et le compas des constructions géométriques, d'où les origines de la *Géométrie de la règle*, science qui fut cultivée avec succès par quelques disciples de Carnot et dont la fécondité fut accrue par la concession, proposée par Poncelet et admise par Steiner, d'un cercle fixe dans le plan du dessin. Au contraire, les praticiens, épris de l'exactitude presque parfaite que possède le compas, firent valoir la nécessité d'exclure la règle, instrument bien peu exact en soi et dans ses applications : la *Géométrie du compas*, telle qu'on la voit dans un ouvrage justement célèbre de L. Mascheroni, prouve qu'il est possible de chasser tout à fait la règle de l'arsenal des auxiliaires du géomètre. C'est un résultat dont la valeur théorique et pratique ne saurait être méconnue; toutefois, il ne mit pas fin au règne de la droite et de la règle; car le géomètre qui n'admet pas l'usage de cette ligne et de cet instrument doit être préparé à effectuer des constructions qui, quoique toujours élégantes, sont bien souvent d'une complication effrayante. Par conséquent les instruments permis par Euclide sont tous les deux encore employés toujours; on remarque seulement que les constructions où le rôle principal est joué par la droite se distinguent par leur simplicité théorique, tandis que celles où domine le cercle sont pratiquement préférables par leur exactitude. Pour donner à ce *criterium* toute la précision désirable, il est nécessaire de noter dans chaque construction le nombre des droites et le nombre de circonférences qu'il est nécessaire de tracer, et de considérer le premier nombre comme un coefficient de simplicité et le second comme un coefficient d'exactitude. C'est précisément le système qu'imagina M. Lemoine, lorsque en 1888, il réussit à résoudre le problème (dont l'importance est indiscutable, dans une époque où les méthodes graphiques sont toujours plus appréciées) de faire une comparaison de différentes solutions du même problème. C'est un système qui (les développements précédents le prouvent!) est assez naturel ; toutefois il semble que personne n'y avait songé auparavant : de manière que

M. Lemoine peut bien appliquer à soi-même le vers de A. de Musset : « Mon verre n'est pas grand, mais je bois dans mon verre ».

Depuis le jour (16 juillet 1888) où M. Haton de la Goupillière présenta à l'Académie des Sciences le premier essai de M. Lemoine sur le problème énoncé tout à l'heure, ce géomètre distingué continua sans cesse de perfectionner et développer ses idées, aidé en cela par plusieurs de ses compatriotes, parmi lesquels sont dignes d'une mention particulière MM. Evariste Bernès et Gaston Tarry. Toute une nouvelle théorie s'est en conséquence formée, que son créateur appelle *Géométrographie* et dont les fondements sont recueillis dans l'opuscule dont le titre se lit en tête de l'article actuel.

Les buts de cette branche des mathématiques sont, d'après M. Lemoine lui-même, les suivants :

a. Au moyen de certaines conventions, elle donne, pour une construction quelconque exécutée, un symbole qui est une sorte de mesure de sa simplicité et des chances de sa plus ou moins grande exactitude.

b. Elle conduit aux procédés pour effectuer, le plus simplement possible, une construction déterminée indiquée par la géométrie.

c. Elle discute, quand il y a lieu, une construction dont le principe est donné, pour y substituer une construction plus simple qui peut arriver à différer tout à fait de la première indication.

d. Elle permet de comparer entre elles toutes les constructions que l'on connaît d'un même problème et de choisir parmi celles-là la plus simple, que l'on appelle la construction géométrographique du problème, jusqu'à ce qu'on en ait trouvé une plus simple, s'il y en a, qui devient alors la construction géométrographique du problème.

En essayant d'appliquer une comparaison de cette espèce aux problèmes classiques on arriva à la conséquence inattendue et non désirée que les solutions les plus connues ne sont pas toujours les meilleures; cela n'est-il pas suffisant à prouver la valeur théorique et pratique de la géométrographie et l'opportunité de la cultiver pour la rendre encore plus parfaite? Nous souhaitons en conséquence que l'exemple de M. Lemoine soit suivi, et que les géomètres, sans en exagérer l'importance, reconnaissent que cette nouvelle petite branche a bien droit de sa place au soleil.

Il faudrait dire maintenant par quels moyens la géométrographie arrive aux buts dont nous avons fait l'énumération ci-dessus; mais ils ont été exposés tout au long dans plusieurs traités récents de géométrie [1], de manière qu'ils sont certainement connus par tous les lecteurs de l'*Enseignement mathématique*. Sans occuper par leur exposition un espace précieux, nous remarquerons seulement que les nombreuses et élégantes applications que renferme le livre dont nous nous occupons, sont suffisantes pour en faire comprendre la portée et la nature et pour permettre à tout lecteur intelligent de les multiplier à son gré.

Nous finirons ce compte rendu par une remarque.

On pourrait croire que cette nouvelle publication de M. Lemoine soit un résumé complet de l'état actuel de la géométrographie : rien de plus faux; en quatorze année de vie, la fille de M. Lemoine s'est développée bien plus

---

[1] Je cite ceux de Rouché et de Comberousse (7e éd.) et de Niewenglowski et Gérard.

qu'on pourrait le croire par le portrait en miniature que nous en avons sous les yeux. Et il aurait été très désirable et extrêmement utile que l'auteur, pour donner une idée de son état actuel, eût mis, à la fin de son beau travail, une liste des ouvrages qui s'y rapportent. Personne mieux que lui n'aurait pu la rédiger ; et nous souhaitons qu'il saisisse une occasion prochaine pour faire ce travail supplémentaire ; c'est un travail qu'il pourra faire sans grande peine et qui ne peut lui procurer que de l'honneur et du plaisir ; car, n'est-ce pas avec un orgueil légitime qu'on fait le bilan d'une richesse due au talent, à l'initiative et à l'énergie qu'on a déployées ?

G. Loria (Gênes).

H. Poincaré. — **Electricité et Optique**. — *La lumière et les théories électrodynamiques*. — Leçons professées à la Sorbonne en 1888, 1890 et 1899, 2e édition, revue et complétée par Jules Blondin et Eugène Néculcéa. 1 vol. gr. in-8°. Paris, C. Naud, éditeur. Prix : 22 fr.

Ce n'est pas une analyse de l'ouvrage de M. Poincaré que je me propose d'entreprendre en ces lignes. Je désire plutôt rendre audit ouvrage l'humble tribut de mon admiration.

Les théories électrodynamiques qui passent successivement sous les yeux du lecteur sont pourtant bien loin d'une perfection admirable ; elles ne sont basées que sur des hypothèses qui ont été développées avec trop de rigueur et par de trop grands esprits pour s'allier d'une façon simpliste avec les résultats expérimentaux, mais ce sont précisément ces contradictions qui auraient fait le désespoir d'esprits moins grands, sur lesquelles M. Poincaré insiste pour en conclure d'une façon magistrale l'impossibilité radicale de faire de l'analyse mathématique l'instrument de recherche des causes primordiales des phénomènes physiques.

L'homme s'est imaginé pendant longtemps, en demandant le pourquoi des phénomènes naturels, qu'il posait une question très précise, accordant simplement qu'elle devait être très difficile à résoudre. Or, il n'y a pas là le moins du monde la difficulté d'un problème nettement posé et dont on sait à l'avance de la solution qu'elle doit nécessairement exister.

La difficulté provient d'une indétermination extraordinaire qui montre comme également vraisemblables une foule d'explications différentes dès que la raison humaine pure en est réduite à se débattre seule, elle qui est à coup sûr une fonction très peu consciente de ces mêmes principes qu'elle prétend parfois analyser.

M. Poincaré nous montre d'abord que dans tout phénomène physique, nos sens atteignent un certain nombre de paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$, qui, s'il existe une explication mécanique du phénomène, satisfont aux équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Or, une pareille explication mécanique repose toujours sur l'existence de certains mouvements de particules matérielles appartenant à la matière considérée elle-même ou à certains fluides tels que l'éther de Fresnel.

Soit p le nombre des particules considérées. Leurs coordonnées x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2 \ldots, p)$ doivent pouvoir s'exprimer en fonction des q de telle façon que l'on ait

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=p} (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

pour l'énergie cinétique du système. Quant à l'énergie potentielle U, elle devra se réduire à une simple fonction des coordonnées x_i, y_i, z_i.

Or, il est facile de voir que ces deux conditions ne déterminent pas p et que ce nombre peut toujours conserver toute valeur attribuée à l'avance.

La possibilité d'une explication mécanique découle donc simplement du fait que l'énergie constante qui entre en jeu dans le système se scinde en deux parties T et U dont on peut connaître l'expression.

Et il y a alors une infinité d'explications mécaniques !

C'est là l'idée de Maxwell quant à son explication des phénomènes électromagnétiques. M. Poincaré nous présente également au début de ses leçons la célèbre hypothèse du savant anglais d'après laquelle tous les courants seraient des courants fermés.

Cette théorie dans laquelle les courants se fermeraient au travers des diélectriques par l'intermédiaire d'un *fluide inducteur* qui y prendrait un état d'équilibre contraint devait conduire à de nombreuses conséquences qui, vingt-cinq ans plus tard, devaient être triomphalement vérifiées par les expériences de Hertz. Ainsi s'établit définitivement dans la science la théorie électromagnétique de la lumière, d'après laquelle celle-ci serait une perturbation électro-magnétique se propageant dans les diélectriques, au premier rang desquels il faut placer le vide interplanétaire.

L'idée de ne pas faire jouer aux diélectriques un rôle absolument passif remonte, il est vrai, à Poisson et à Mossotti. Ceux-ci considéraient l'air comme le seul diélectrique homogène, tous les autres étant remplis d'une prodigieuse quantité de petites sphères conductrices susceptibles de s'électriser par influence et produisant par leurs mouvements les effets que, avec beaucoup plus de précision, Maxwell devait attribuer à son fluide inducteur.

La théorie du savant anglais conduit à quelques formules d'une admirable simplicité, qui apparurent comme liant d'une façon bien inattendue certains éléments des phénomènes électriques à d'autres relatifs aux phénomènes lumineux. Malheureusement, ces relations ne sont pas toujours d'accord avec les résultats des recherches expérimentales.

Suivant la nature du diélectrique qui sépare deux conducteurs, les phénomènes électriques mesurables changent de valeur, si bien que chacun de ces corps a un *pouvoir inducteur spécifique* qui lui est propre, lequel est représenté dans les formules par un simple coefficient que Maxwell appelle K.

Soient maintenant V_1 la vitesse des ondes électro-magnétiques dans le vide et V leur vitesse dans un certain milieu transparent. La théorie de Maxwell donne

$$\frac{V_1}{V} = \sqrt{K}.$$

Mais d'après la théorie ordinaire de Fresnel, le premier membre de cette égalité est l'indice absolu de réfraction n du milieu considéré. Donc $n^2 = K$.

Cette relation curieuse est assez bien vérifiée pour quelques diélectriques liquides, mais paraît l'être d'autant moins que ceux-ci ont une formule atomique plus compliquée.

Pour les solutions électrolytiques, elle cesse même d'avoir un sens, ce qu'il ne faut pas toutefois considérer comme extraordinaire, car l'ionisation fait des électrolytes des conducteurs d'une nature toute spéciale.

La théorie de Maxwell nous donne encore deux relations curieuses d'après lesquelles un corps serait d'autant plus opaque pour la lumière qu'il est conducteur pour l'électricité, son opacité étant d'ailleurs une certaine fonction exponentielle de l'épaisseur.

Il est à peine besoin d'ajouter que ces relations ne sont pas toujours d'une vérification facile et satisfaisante.

Après un chapitre étendu consacré à la polarisation rotatoire magnétique et aux curieux phénomènes observés par Hall et par Kerr, qui indiquent une corrélation intime entre la lumière et l'électricité sans qu'on puisse encore en donner une explication analytique tout à fait satisfaisante, M. Poincaré consacre une seconde partie à l'examen comparé des théories électrodynamiques d'Ampère, de Weber et d'Helmholtz.

C'est surtout la théorie de Helmholtz qui est remarquable. L'expression du potentiel de deux éléments de courant est à la fois une généralisation des expressions données par Weber, Neumann et Maxwell, mais non de celle donnée par Ampère.

Il faut remarquer en effet que, pour toute expression du potentiel de la forme imaginée par Helmholtz, il y a des couples qui tendent à faire tourner les éléments considérés et qui existent toujours en même temps que la force dirigée suivant la droite qui joint lesdits éléments.

Or, Ampère envisage uniquement cette dernière force. Il y a là un antagonisme assez singulier entre les théories d'Ampère et d'Helmholtz.

Ce fut pour Joseph Bertrand l'occasion d'une vive controverse, l'illustre savant prétendant que si les couples de Helmholtz agissaient réellement sur les éléments d'un fil, celui-ci serait réduit en poussière, et Helmholtz répliquant que les aiguilles aimantées ne manifestaient aucune intention de rupture, bien que tous leurs éléments soient soumis à un couple.

M. Poincaré déclare qu'il ne veut pas s'immiscer dans cette polémique, mais en trois lignes qu'on ne saurait trop admirer nous fait remarquer qu'il y a peut-être là un oubli du caractère artificieux des hypothèses, qu'on ne croit pas à la réalité des fluides magnétiques de Coulomb agissant sur l'aiguille aimantée et qu'il ne faut pas croire davantage « à l'existence objective d'un courant matériel circulant dans un conducteur ».

M. Poincaré consacre un long chapitre à montrer comment on peut passer de la théorie de Helmholtz à celle de Maxwell et passe en revue les divers arguments qui militent plutôt en faveur de celle du savant anglais.

L'examen des théories de Hertz et de Lorentz forme une troisième partie qui n'est certainement pas la moins intéressante.

Hertz divise un peu arbitrairement son électrodynamique en deux parties relatives l'une aux corps en repos, l'autre aux corps en mouvement, de telle sorte que les équations fondamentales soient de même forme dans les deux cas, à cela près que les secondes contiennent un terme de plus que les premières. Il est vrai que ce terme complémentaire n'est simple que grâce à une notation symbolique. La théorie de Hertz est assez satisfaisante au point de vue mécanique, mais elle ne permet pas d'expliquer tous les phénomènes optiques. Le contraire arrive pour la théorie de Lorentz, qui explique des phénomènes optiques que n'expliquait pas Hertz, mais qui malheureusement contredit le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. On sait maintenant ce qu'il faut penser des postulats fondamentaux de la mécanique, lesquels apparaissent aussi fragiles que ceux de la géométrie, et Hertz lui-même les a suffisamment critiqués. La théorie de Lorentz n'en est donc pas moins à considérer, surtout pour le caractère hardi des hypothèses que fait son auteur.

Suivant lui, il n'y a pas de magnétisme, mais seulement des courants particulaires tels que les entendait Ampère, et quant aux conducteurs ils sont chargés d'ions qui transportent l'électricité ainsi que dans les électrolytes.

De là deux façons différentes d'envisager les phénomènes suivant que l'on suppose à l'observateur des sens assez subtils pour qu'il puisse voir les courants particulaires et le cheminement des ions dans les conducteurs, ou des sens aussi grossiers que lès nôtres avec lesquels il ne perçoit que des effets moyens et donne le nom de magnétisme et de courants de conduction à des phénomènes dont il ne peut pénétrer le détail intime. Une partie très intéressante de la théorie de Lorentz est celle qui traite des phénomènes optiques dans les corps en mouvement.

Il semble que les phénomènes optiques doivent notamment être altérés à la surface de la Terre par suite du mouvement de celle-ci, mais on a toujours rencontré des difficultés bizarres à vouloir vérifier cela par l'expérience. La théorie de Lorentz explique en partie ces difficultés, et si elle ne les lève complètement, elle est pourtant assez parfaite sur ce point, comme d'ailleurs sur beaucoup d'autres, pour pouvoir être considérée comme une théorie perfectible que de nouveaux perfectionnements rapprocheront sans doute beaucoup de la réalité.

M. Poincaré consacre encore des pages remarquables au phénomène de Zeeman. On sait qu'il y a là une nouvelle influence remarquable du magnétisme sur la lumière en ce sens que l'effet Zeeman est produit non par l'action d'un milieu aimanté sur un faisceau de lumière, mais par le fait que les ondes lumineuses naissent dans un champ magnétique, la source lumineuse elle-même étant placée entre les pôles d'un électro-aimant.

L'ouvrage de M. Poincaré se termine par un exposé succinct d'une théorie récente due à Larmor, et à ce propos il rappelle toutes les théories précédentes pour les comparer avec la nouvelle, qui ne respecte pas plus le principe de l'égalité de l'action et de la réaction que celle de Lorentz.

C'est en comparant toutes ces théories différentes, et d'ailleurs peu compatibles, que le géomètre trouvera matière à réflexion, tout autant que le physicien qui accorde trop de crédit à l'expérience.

Ce nouvel ouvrage de M. Poincaré a été rédigé dans sa partie nouvelle par l'un de ses élèves, M. Eugène Néculcéa, qui a rendu ainsi un grand service au monde scientifique. Il a été corrigé aussi scrupuleusement que possible par M. Néculcéa et moi, et fait d'ailleurs honneur à son éditeur quant à sa perfection matérielle.

A. Buhl (Paris).