TRANSFORMATION DES COORDONNÉES PROJECTIVES

TRANSFORMATION

DES

COORDONNÉES PROJECTIVES

La question de la transformation des coordonnées barycentriques, que M. Laisant a traitée d'une façon si élégante (voir *L'enseignement*, t. III, 1901, p. 208-210), n'est qu'un cas particulier du problème de la transformation des coordonnées projectives quelconques. Or, ce problème s'impose dans plusieurs circonstances, par exemple lorsqu'on veut exposer méthodiquement les applications des formes algébriques à la géométrie ; en conséquence, depuis longtemps, j'ai la coutume de le traiter dans mon cours d'une manière très simple qui peut-être intéressera quelques lecteurs de cette *Revue* et que, par conséquent, je crois bon d'exposer en quelques lignes.

Soient donnés cinq points quelconques fixes dans l'espace : A_0, A_1, A_2, A_3, U, et un point quelconque P ; on sait que les quatre rapports anharmoniques suivants :

$$(1) \quad x = \overline{A_2A_3}\,(A_1, A_0, U, P), \quad y = \overline{A_3A_1}\,(A_2, A_0, U, P), \quad z = \overline{A_1A_2}\,(A_3, A_0, U, P$$

sont les coordonnées projectives du point P, tandis que si l'on pose

$$(2) \qquad x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0},$$

$x_0, \ldots, x_3$ en sont les coordonnées homogènes. Prenons, à présent, cinq autres points fixes A'_0, A'_1, A'_2, A'_3, U', dont les coordonnées homogènes soient respectivement

$$\begin{array}{llll} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03} ; \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} ; \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} ; \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} ; \\ u_0, & u_1, & u_2, & u_3 ; \end{array}$$

par rapport à ce nouveau système, le point P aura de nouvelles coordonnées projectives qui seront définies par les équations suivantes, analogues aux équations (1) :

$$(3)\qquad x' = \overline{A_2'A_3'}\,(A_1', A_0', U', P),\quad y' = \overline{A_3'A_1'}\,(A_2', A_1', U', P),$$
$$z' = \overline{A_1'A_2'}\,(A_3', A_0', U', P).$$

Or, si on indique par α_{ik} le complément algébrique de a_{ik} dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{00} & \cdot\cdot & a_{03} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{30} & \cdot\cdot & a_{33} \end{vmatrix},$$

on trouve que les équations homogènes des deux plans $A'_2\,A'_3\,A'_1$ et $A'_2\,A'_3\,A'_0$ sont respectivement :

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha_{00}X_0 + \alpha_{01}X_1 + \alpha_{02}X_2 + \alpha_{03}X_3 = 0 \\ \alpha_{10}X_0 + \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 = 0, \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i}X_i = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i}X_i = 0, \end{cases}$$

$X_0 \ldots X_3$ étant les coordonnées courantes. Comme les deux plans $A'_2\,A'_3\,U'$, $A'_2\,A'_3\,P$ appartiennent au faisceau déterminé par les deux plans $A'_2\,A'_3\,A'_1$ et $A'_2\,A'_3\,A'_0$ on trouve tout de suite que leurs équations sont :

$$(5)\quad \sum_{i=0}^{i=3}\alpha_{0i}X_i - \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{i=3}\alpha_{0i}u_i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{i=3}\alpha_{1i}u_i}\sum_{i=0}^{i=3}\alpha_{1i}X_i = 0\,;\quad \sum_{i=0}^{i=3}\alpha_{0i}X_i - \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{i=3}\alpha_{0i}x_i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{i=3}\alpha_{1i}x_i}\sum_{i=0}^{i=3}\alpha_{1i}X_i = 0.$$

Le rapport anharmonique formé par les deux plans (4) avec les deux plans (5) est exprimé par le quotient

$$\frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} u_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i} u_i} : \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} x_i}$$

si donc on pose $x' = \frac{x'_1}{x'_0}$, à cause des équations (3), on aura :

(6) $$\frac{x_1'}{x_0'} = \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i} u_i} : \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} u}.$$

On trouve d'une manière analogue :

(7) $$\frac{x_2'}{x_0'} = \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{2i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{2i} u} : \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} x}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{2i} u_i}$$

(8) $$\frac{x_3'}{x_0'} = \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{3i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{3i} u_i} : \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} u_i}.$$

Or, en comparant entre elles les trois équations (6), (7), (8), on voit tout de suite que, en appelant ρ un facteur numérique différent de o et de ∞, on peut écrire :

(9) $$\rho n_k' = \frac{\alpha_{k0} x_0 + \alpha_{k1} x_1 + \alpha_{k2} x_2 + \alpha_{k3} x_3}{\alpha_{k0} u_0 + \alpha_{k1} u_1 + \alpha_{k2} u_2 + \alpha_{k3} u_3}.$$

Ces équations donnent les nouvelles coordonnées homogènes d'un point quelconque de l'espace en fonction des anciennes ; ce sont donc les formules de transformation cherchées ; elles prouvent que les premières sont exprimées par des formes linéaires des autres, dont les coefficients ont une signification évidente.

On peut procéder d'une manière analogue lorsqu'il s'agit de plans.

Il va sans dire que pour les formes géométriques de la première et de la deuxième espèce ces calculs sont applicables encore, mais ils sont encore plus simples, et mènent à des conclusions toutes pareilles.

G. LORIA.

Gênes, juin 1902.