

# RELATIONS ANALYTIQUES DES SPHÈRES ET ELLIPSOIDES (1)

Autor(en): **Kilbinger**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-5594>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

RELATIONS ANALYTIQUES  
DES  
SPHÈRES ET ELLIPSOÏDES <sup>(1)</sup>

---

Dans le présent travail nous allons démontrer, comment on peut utiliser la théorie de l'affinité, pour établir quelques résultats analytiques relatifs à l'ellipsoïde à l'aide des analogues de la sphère.

Soient données la sphère  $K$  et l'ellipsoïde  $K_1$ , et supposons que ce soient deux surfaces homologues des systèmes alliés des espaces  $\Sigma$  respectivement  $\Sigma_1$ . Nous établirons dans  $\Sigma_1$  un système de coordonnées obliques en prenant pour axes trois diamètres conjugués quelconques de  $K_1$ . Les diamètres correspondants de  $K$  sont rectangulaires et seront les axes des coordonnées de  $K$ . Nous les désignons par  $\Xi\Xi_1$ ,  $HH_1$  et  $ZZ_1$ , l'origine par  $O$  (le centre de  $K$ ) et les coordonnées correspondantes de  $K_1$  par  $XX_1$ ,  $YY_1$  et  $ZZ_1$ , l'origine par  $O_1$  (le centre de  $K_1$ ). Soient encore  $2a_1$ ,  $2b_1$ , et  $2c_1$  les longueurs des trois diamètres conjugués de  $K_1$ , qui coïncident aux axes des coordonnées et  $r$  le rayon de la sphère  $K$ . Alors nous désignons deux points homologues  $P$  et  $P_1$  situés sur  $K$  et  $K_1$ , dont les coordonnées sont respectivement  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  et  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

De ce que deux parties d'une droite de  $\Sigma$  sont dans le même rapport que les homologues dans  $\Sigma_1$ , nous avons les équations suivantes des coordonnées :

$$(1) \quad \frac{\xi}{r} = \frac{x}{a_1}, \quad \frac{\eta}{r} = \frac{y}{b_1}, \quad \frac{\zeta}{r} = \frac{z}{c_1}.$$

---

(<sup>1</sup>) Sphère et ellipsoïde, *L'Enseignement mathématique*, 2<sup>e</sup> année, 1900, p. 196.

L'équation de la sphère K est :

$$(2) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2.$$

Il suit de (1) et (2) :

$$(3) \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1.$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde par rapport aux trois diamètres conjugués.

Si l'on fait dans (3) successivement  $x, y, z = 0$ , on obtient des ellipses comme trace de la surface K sur les plans coordonnés. Tout plan diamétral pouvant être un plan coordonné, nous pouvons généraliser ce résultat, en disant, que les traces de  $K_1$  sur les plans diamétraux sont des ellipses.

L'équation du plan tangent de la sphère K au point  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  peut s'écrire :

$$(4) \quad \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = r^2.$$

Soient  $x_1, y_1, z_1$  les coordonnées du point correspondant, on aura pour le plan tangent de  $K_1$  au point  $x_1, y_1, z_1$  les relations :

$$(5) \quad \frac{\xi_1}{r} = \frac{x_1}{a_1}, \quad \frac{\eta_1}{r} = \frac{y_1}{b_1}, \quad \frac{\zeta_1}{r} = \frac{z_1}{c_1}$$

et comme ci-dessus :

$$(6) \quad \frac{\xi}{r} = \frac{x}{a_1}, \quad \frac{\eta}{r} = \frac{y}{b_1}, \quad \frac{\zeta}{r} = \frac{z}{c_1}.$$

Il suit des trois dernières conditions l'équation du plan tangent :

$$(7) \quad \frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{b_1^2} + \frac{zz_1}{c_1^2} = 1.$$

L'équation (7) désigne encore un plan polaire d'un point quelconque  $x_1, y_1, z_1$ .

La normale de K est un rayon de K. Les équations au point  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  sont :

$$(8) \quad \xi - \xi_1 = \frac{\xi_1}{\zeta_1} (\zeta - \zeta_1)$$

et

$$\eta - \eta_1 = \frac{\eta_1}{\zeta_1} (\zeta - \zeta_1);$$

ou

$$(9) \quad \frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\zeta}{\zeta_1}.$$

Cette normale a pour ligne correspondante en  $\Sigma_1$  un diamètre  $d_1$  de  $K_1$  conjugué au plan tangent (7).

Des équations (5), (6) et (9) nous dérivons la relation pour le diamètre  $d_1$ .

$$(10) \quad \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}.$$

L'équation du plan diamétral de  $K$  conjugué à la normale (9) est :

$$(11) \quad \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = 0.$$

Par une substitution comme ci-dessus nous aurons pour le plan diamétral conjugué au diamètre (10) la condition :

$$(12) \quad \frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{b_1^2} + \frac{zz_1}{c_1^2} = 0.$$

Les équations (7) et (12) démontrent, que ces deux plans sont parallèles entre eux.

Les plans tangents aux extrémités des diamètres conjugués  $2a_1$ ,  $2b_1$  et  $2c_1$  ont les équations :

$$(13) \quad x = \pm a_1, y = \pm b_1, z = \pm c_1.$$

C'est-à-dire que ces plans tangents sont parallèles aux plans des coordonnées.

Jusqu'ici nous avons employé un système de coordonnées obliques. Mais nous pouvons aussi prendre pour coordonnées les trois axes de l'ellipsoïde  $K_1$ . Désignons par  $2a$ ,  $2b$  et  $2c$  ces trois axes, nous pouvons alors dériver très facilement les résultats connus de la géométrie analytique des résultats ci-dessus. Nous les obtiendrons en remplaçant dans les équations ci-dessus les valeurs  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .