SUR LES HEPTAGONES ET LES ENNÉAGONES RÉGULIERS

Autor(en): **Joffroy, Jos.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5575

de longueur, sinon un multiple de cet atome, et qu'il n'y a pas de lignes, à proprement parler, incommensurables entre elles, c'est-à-dire n'ayant aucune commune mesure. La diagonale d'un carré et son côté sont des droites ayant pour mesure commune l'atome et pas d'autre ; il en est de même de la circonférence d'un cercle et de son rayon. Ce qui est vrai pour les lignes est vrai aussi pour les surfaces et pour les volumes.

S'il n'y a pas de grandeurs incommensurables entre elles, il n'y a pas de nombre incommensurable avec l'unité ; $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π,... sont des nombres qui ont pour diviseur commun avec l'unité l'atome numérique ou le plus petit de tous les nombres. La considération de l'atome supprime donc l'incommensurable, et elle rend superflu, après l'avoir rendu acceptable, le procédé usuel des limites, dans les définitions géométriques.

J.-F. Bonnel (Lyon).

SUR LES

HEPTAGONES ET LES ENNÉAGONES RÉGULIERS

Etant à l'Ecole Polytechnique j'ai trouvé ces *théorèmes* qui ne sont peut-être pas encore connus :

I. — Le côté de l'ennéagone régulier étoilé $2\sin\frac{4\pi}{9}$ *est égal à la somme des côtés de l'autre ennéagone régulier étoilé* $2\sin\frac{2\pi}{9}$ *et de l'ennéagone régulier convexe* $2\sin\frac{\pi}{9}$.

Démonstration : Il faut trouver zéro pour l'expression

$$\sin\frac{4\pi}{9} - \left(\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{2\pi}{9}\right)$$

qui s'écrit

$$\sin\frac{4\pi}{9} - 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18},$$

ou

$$\sin \frac{4\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{18},$$

ou encore

$$\sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{4\pi}{9},$$

c. q. f. d.

II. — L'inverse du côté de l'heptagone régulier convexe est égal à la somme des inverses des côtés des deux heptagones réguliers étoilés.

Démonstration : Il faut établir l'égalité

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}},$$

ou celle-ci

$$\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}.$$

Si je décompose en 3 sommes les 3 produits, elle devient

$$\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{5\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{4\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7}\right),$$

ou

$$0 = 0,$$

c. q. f. d.

III. — *Le côté de l'heptagone régulier convexe augmenté de* $R\sqrt{7}$ (R *étant son rayon) vaut la somme des côtés des deux heptagones réguliers étoilés.*

Démonstration : Si dans l'expression de $\sin 7x$ en fonction de $\sin x$ on fait $7x = \pi$, puis $2x = y$, ou obtient l'équation connue

$$y^6 - 7y^4 + 14y^2 - 7 = 0,$$

dont les racines sont

$$\pm 2 \sin \frac{\pi}{7} \quad \text{ou} \quad \pm a$$

$$\pm 2 \sin \frac{\pi}{7} \quad \text{ou} \quad \pm b$$

$$\pm 2 \sin \frac{3\pi}{7} \quad \text{ou} \quad \pm c,$$

a, b, c, étant les côtés de l'heptagone convexe et des heptagones étoilés. On voit que cette équation fournit

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7;$$

d'autre part mon dernier théorème fournit

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ou

$$2bc - 2ab - 2ac = 0,$$

ajoutant la première et la troisième égalité, j'obtiens

$$(b + c - a)^2 = 7$$

ou

$$a + \sqrt{7} = b\ c.$$

Remarque. — Le côté de l'heptagone régulier convexe vaut 0,8677... et diffère peu du *double du module* des logarithmes vulgaires 0,8685...

Jos. Joffroy (Paris).

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES

---

1. — Les théorèmes suivants sont presque évidents :

A, B, C, D, E étant cinq points, les conjuguées harmoniques des droites AE par rapport à (AC, AD) et BE par rapport à (BC, BD) se coupent en un point F de la conique (ABCDE). — Car si l'on considère les points C, D, E, F comme fixes, on a, entre les rapports anharmoniques, la relation

$$A\,(CDEF) = B\,(CDEF) = -1.$$

En vertu du théorème de Chasles, les six points sont sur une conique.