1. — Le vecteur.

EQUIVALENCE DU MOUVEMENT

D'UNE LIGNE DROITE INVARIABLE σ AU DÉPLACEMENT D'UNE POSITION DONNÉE σ_1 A UNE AUTRE POSITION DONNÉE σ_2

I. — *Le vecteur.*

§ 1. — Soit un vecteur $\overline{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \alpha$ passant d'une manière quelconque de la position $\overline{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1} = \alpha_1$ à la position $\overline{\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2} = \alpha_2$, les points $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ étant les points homologues de α, α_1 et α_2, et les déplacements des extrémités du vecteur α, soient $\overline{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}$ et $\overline{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$, étant de grandeur finie.

Lorsque le vecteur passe de la position $\alpha_1 = \overline{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1}$ à la position $\alpha_2 = \overline{\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}$ (fig. 1), on a, à cause de l'invariabilité de sa longueur,

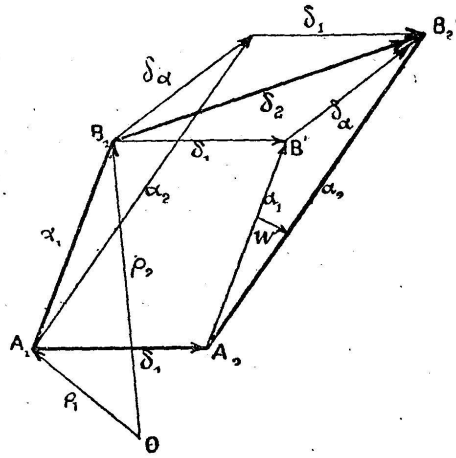

Fig. 1.

(1) $$\alpha^2 = \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = a^2.$$

Les extrémités de α ayant pour déplacements

$$\overline{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2} = \delta_1, \ \overline{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \delta_2,$$

on a

$$\alpha_1 + \delta_2 - \alpha_2 - \delta_1 = 0,$$

de sorte que la différence des déplacements des extrémités $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ du vecteur α est

(2) $$\delta_\alpha = \delta_2 - \delta_1 = \alpha_2 - \alpha_1.$$

« La différence des déplacements totaux des extrémités d'un vecteur α, quand il passe d'une position α_1 en une autre α_2 d'une manière quelconque, est égale à la différence des vecteurs α_2 et α_1.

De ce que

(3) $$\alpha_1 + \delta_\alpha = \alpha_2,$$

on tire par quadrature intérieure des membres de cette équation

$$(\alpha_1 + \delta_\alpha)^2 = \alpha_2^2,$$

ou

$$\alpha_1^2 + 2(\alpha_1 \mid \delta_\alpha) + \delta_\alpha^2 = \alpha_2^2,$$

d'où il suit par considération de l'équation (1)

$$(2\alpha_1 + \delta_\alpha) \mid \delta_\alpha = 0, \tag{4}$$

et, si nous avons égard à l'équation (3)

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \mid \delta_\alpha = 0. \tag{4'}$$

« La différence des déplacements totaux des extrémités d'un vecteur est continuellement perpendiculaire à la somme des vecteurs α_1 et α_2. »

On a aussi

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \mid (\delta_2 - \delta_1) = 0,$$

d'où

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \mid \delta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) \mid \delta_1. \tag{5}$$

« Les projections des déplacements totaux des extrémités d'un vecteur α sur la direction de la somme $(\alpha_1 + \alpha_2)$ des vecteurs α_1 et α_2 sont égales entre elles. »

De l'équation (2) résulte en multipliant ses membres par $(\alpha_2 - \alpha_1)$

$$(\delta_2 - \delta_1)(\alpha_2 - \alpha_1) = 0,$$

de sorte que

$$[(\delta_2 - \delta_1)(\alpha_1\alpha_2)] = 0, \tag{6}$$

et si nous prenons

$$[(\delta_2 - \delta_1) : \sqrt{(\alpha_1\alpha_2)^2}] = \mid \varepsilon,$$

il vient

$$(\delta_2 - \delta_1) \mid \varepsilon = 0, \qquad \delta_2 \mid \varepsilon = \delta_1 \mid \varepsilon. \tag{6'}$$

« Les projections des déplacements totaux des extrémités du vecteur α sur la direction du vecteur de position des plans parallèles à α_1 et α_2 sont égales l'une à l'autre. »

§ 1'. — Si le vecteur α passe de la position α_1 à la position infiniment voisine α_2, on a $\delta_1 = d\rho_1$, $\delta_2 = d\rho_2$, $\delta_\alpha = d\alpha$; il résulte donc du paragraphe 1 :

$$
\begin{aligned}
(7) \qquad & d\alpha = d\rho_2 - d\rho_1 = \alpha_2 - \alpha_1, \\
& \alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\rho_2}{dt} - \frac{d\rho_1}{dt}, \\
& \alpha' = \overline{v_2} - \overline{v_1}.
\end{aligned}
$$

« La dérivée du vecteur α par rapport au temps est égale à la différence des vitesses de son point extrême et son point initial. »

En négligeant des quantités infiniment petites d'ordre élevé devant des quantités d'ordre moindre, nous obtenons de l'équation (4)

$$2(\alpha_1 \mid d\alpha) = 0, \qquad (\alpha_1 \mid d\alpha) = 0,$$

ou

$$(\alpha \mid d\alpha) = 0, \qquad \alpha_1 \equiv \alpha,$$

de sorte que

$$\alpha \left| \frac{d\alpha}{dt} \right. = 0, \qquad \alpha \mid (\overline{v_2} - \overline{v_1}) = 0.$$

et aussi

$$\alpha \mid d\rho_2 = \alpha \mid d\rho_1, \qquad \alpha \mid \overline{v_2} = \alpha \mid \overline{v_1}.$$

« La différence des déplacements infiniment petits, ainsi que celle des vitesses des extrémités d'un vecteur lui est perpendiculaire. Les projections des déplacements infiniment petits des extrémités d'un vecteur, ainsi que les projections des vitesses de ces points sur la direction du vecteur sont égales l'une à l'autre. »

Il résulte de plus de l'équation (6)

$$(d\rho_2 - d\rho_1)\,[\alpha(\alpha + d\alpha)] = 0$$

ou

$$(d\rho_2 - d\rho_1)\,(\alpha d\alpha) = 0.$$

Si nous prenons

$$(\alpha d\alpha) : \sqrt{(\alpha d\alpha)^2} = (\alpha\alpha') : \sqrt{(\alpha\alpha')^2} = \mid \varepsilon,$$

nous obtenons

$$
\begin{aligned}
(d\rho_2 - d\rho_1) \mid \varepsilon = 0, \qquad & d\rho_2 \mid \varepsilon = d\rho_1 \mid \varepsilon, \\
(\overline{v_2} - \overline{v_1}) \mid \varepsilon = 0, \qquad & \overline{v_2} \mid \varepsilon = \overline{v_1} \mid \varepsilon.
\end{aligned}
$$

« Les projections des déplacements infiniment petits, ainsi que ceux des vitesses des extrémités d'un vecteur α sur la direction du vecteur de position ε des plans parallèles à α dans ses positions originale et finale sont égales entre elles. »

§ 2. — Avec $\overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}'} = \delta_1$ (fig. 1) on a $\overline{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}_2} = \delta_\alpha$,

$$\sqrt{\overline{\mathcal{A}_2\mathfrak{B}'}^2} = \sqrt{\overline{\mathcal{A}_2\mathfrak{B}_2}^2} = a.$$

Posons $\sphericalangle \mathfrak{B}'\mathcal{A}_2\mathfrak{B}_2 = w$. Alors $\overline{\mathcal{A}_2\mathfrak{B}'}$ peut être transporté par rotation autour du point $\mathcal{A}_2$ en $\overline{\mathcal{A}_2\mathfrak{B}_2}$, l'angle de rotation étant égal à w, l'axe de rotation passant par $\mathcal{A}_2$ et étant une droite perpendiculaire au plan des points $\mathcal{A}_2$, $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{B}_2$. Nous avons alors les relations

$$\alpha_2 = \cos w\alpha_1 + \sin w \mid (\varepsilon\alpha_1),$$

$$\delta_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = (\cos w - 1)\,\alpha_1 + \sin w \mid (\varepsilon\alpha_1) \tag{8}$$

Si δ_α est considéré comme donné, il s'ensuit pour l'amplitude de w de la rotation

$$\{(\cos w - 1)\,\alpha_1 + \sin w \mid (\varepsilon\alpha_1)\}^2 = \delta\alpha^2,$$

d'où finalement

$$4a^2 \sin^2 \frac{1}{2} w = \delta_\alpha{}^2 = (\delta_2 - \delta_1)^2, \tag{9}$$

équation qui détermine l'angle de rotation.

Le déplacement total de l'extrémité du vecteur α est alors

$$\delta_2 = \delta_1 + \delta_\alpha,$$

$$\delta_2 = \delta_1 + [(\cos w - 1)\,\alpha_1 + \sin w \mid (\varepsilon\alpha_1)]$$

ou

$$\delta_2 = [(\cos w - 1)\,\alpha_1 + \sin w \mid (\varepsilon\alpha_1)] + \delta_1, \tag{10}$$

et nous obtenons cette proposition :

« Chaque mouvement d'un vecteur α, d'une position α_1 en une autre α_2 est équivalent à une translation qui est égale au déplacement total de son élément origine et à une rotation d'un angle égal à celui des vecteurs α_1 et α_2 autour de l'axe $\bar{\varepsilon}$ qui passe par l'élément origine de α et est perpendiculaire aux vecteurs α_1 et α_2.

La translation et la rotation d'après l'équation (10) sont liées additivement l'une à l'autre, l'ordre de leur succession étant arbitraire ; par suite la translation et la rotation peuvent avoir lieu en même temps, l'axe $\bar{\varepsilon}$ se déplaçant parallèlement à lui-même autour du vecteur égal au déplacement total de l'élément origine de α. »

On a $\cos(2\pi - w) = -\cos w$, $\sin(2\pi - w) = -\sin w$. Par conséquent le vecteur α_1 prend aussi la direction du vecteur α_2 s'il tourne autour de l'axe $\bar{\varepsilon}$, qui passe par le point $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_1$, d'un angle dont l'amplitude est égale à $(w - 2\pi)$; mais nous entendons toujours par l'angle des directions de deux droites celui de leurs parties positives, de sorte que même pour le mouvement le plus simple il ne soit question que de la première amplitude.

§ 2'. — Si les déplacements totaux des extrémités du vecteur α sont infiniment petits, la différence des directions des vecteurs α_1 et α_2 est aussi infiniment petite, $\sphericalangle w = dw$. Des équations (8), (9) et (10) il résulte pour ce cas spécial

$$\alpha_2 = \alpha_1 + dw \mid (\varepsilon\alpha_1)$$
$$d\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = dw \mid (\varepsilon\alpha_1) = dw \mid (\varepsilon\alpha)$$
$$\alpha' = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \frac{dw}{dt} \mid (\varepsilon\alpha) = w \mid (\varepsilon\alpha)$$
$$dw = \frac{1}{a}\sqrt{d\alpha^2}, \qquad w = \frac{1}{a}\sqrt{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)^2},$$

où dw est le déplacement angulaire et si $w = \frac{dw}{dt}$ est la vitesse angulaire du vecteur α.

Le déplacement total et la vitesse du point extrême du vecteur α sont

$$d\rho_2 = d\rho_1 + dw \mid (\varepsilon\alpha), \qquad \bar{v}_2 = \bar{v}_1 + w \mid (\varepsilon\alpha).$$

« Si les extrémités d'un vecteur α subissent, dans leur passage d'une position α_1 en une autre α_2, des déplacements infiniment petits, leur mouvement est équivalent à une translation qui est égale au déplacement total de leur élément origine et à une rotation, d'une angle infiniment petit égal à celui des directions des vecteurs α_1 et α_2, autour de l'axe $\bar{\varepsilon}$ qui passe par l'élément origine de $\alpha \equiv \alpha_1$ et est perpendiculaire à α_1 et α_2. L'ordre de la suite de la translation et de la rotation est arbitraire ; celles-ci sont liées additivement l'une à l'autre et les deux peuvent avoir lieu en même temps. »

§ 3. — Dans le cas général des déplacements d'un vecteur dont nous avons parlé dans les paragraphes précédents sont compris tous les cas particuliers, dont nous allons examiner les plus importants maintenant.

1) $\delta_1 = 0$, le point $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ du vecteur $\alpha = \alpha_1$ est sans déplacement. On a alors

$$\delta_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \delta_2, \qquad \delta_1 \mid \varepsilon = 0, \qquad \delta_2 \mid \varepsilon = 0,$$
$$\alpha_2 = \cos w \alpha_1 + \sin w \mid (\varepsilon \alpha_1),$$
$$\delta_2 = (\cos w - 1)\,\alpha_1 + \sin w \mid (\varepsilon \alpha_1), \qquad 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2} w = \delta_2^2.$$

1')

$$d\rho_1 = 0,$$
$$d\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = d\rho_2, \qquad d\rho_1 \mid \varepsilon = 0, \qquad d\rho_2 \mid \varepsilon = 0,$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + dw \mid (\varepsilon \alpha_1) \text{ ou } \alpha_2 = \alpha + dw \mid (\varepsilon \alpha), \qquad \alpha_1 \equiv \alpha,$$
$$d\rho_2 = dw \mid (\varepsilon \alpha), \qquad \overline{v}_1 = 0, \qquad \overline{v}_2 = w \mid (\varepsilon \alpha),$$
$$dw = \frac{1}{a} \sqrt{d\rho_2^2}, \qquad w = \frac{1}{a} v_2.$$

Le déplacement total de l'extrémité du vecteur $\alpha \equiv \alpha_1$ est perpendiculaire à l'axe $\overline{\varepsilon}$; dans le cas 1') il est aussi perpendiculaire au vecteur $\alpha \equiv \alpha_1$. Le vecteur α peut être transporté de la position α_1 à la position α_2 par rotation autour de l'axe $\overline{\varepsilon}$ passant par le point $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

2) $\delta_2 = 0$, l'extrémité $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ du vecteur $\alpha = \alpha_1$ est sans déplacement.

On a alors

$$\delta_\alpha = -\delta_1, \qquad \delta_2 \mid \varepsilon = 0, \qquad \delta_1 \mid \varepsilon = 0,$$
$$\alpha_2 = -[(\cos w \alpha_1 + \sin w \mid (\varepsilon \alpha_1)],$$
$$\delta_1 = -[(\cos w - 1)\,\alpha_1 + \sin w \mid (\varepsilon \alpha_1)], \qquad 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2} w = \delta_1^2,$$
$$d\rho_2 = 0 \text{ donné :}$$

2')

$$d\rho = -d\rho_1, \qquad d\rho_2 \mid \varepsilon = 0, \qquad d\rho_1 \mid \varepsilon = 0,$$
$$\alpha_2 = -[\alpha_1 + dw \mid (\varepsilon \alpha_1)] \text{ ou } \alpha_2 = -[\alpha + dw \mid [\varepsilon \alpha)], \qquad \alpha_1 \equiv \alpha,$$
$$d\rho_1 = -dw \mid (\varepsilon \alpha), \qquad \overline{v}_1 = -w \mid (\varepsilon \alpha),$$
$$dw = \frac{1}{a} \sqrt{d\rho_1^2}, \qquad w = \frac{1}{a} v_1.$$

Le vecteur α passe de la position α_1 à la position α_2 par rotation autour de l'axe $\bar{\varepsilon}$ qui passe par son extrémité si l'amplitude a le sens opposé comme dans 1).

3) Les déplacements δ_1 et δ_2 sont dans un plan si l'on a

$$[\alpha_1\delta_1\delta_2] = 0$$

et alors on a aussi

$$(\alpha_2\delta_1\delta_2) = 0,$$

car

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \delta_1 - \delta_2,$$

on a donc

$$[\alpha_1\delta_1\delta_2] - [\alpha_2\delta_1\delta_2] = 0,$$

et si

$$[\alpha_1\delta_1\delta_2] = 0$$

on a aussi

$$[\alpha_2\delta_1\delta_2] = 0.$$

Le quadrilatère des points $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$ est plan.

3') Pour $\delta_1 = d\rho_1$, $\delta_2 = d\rho_2$, $d\rho_1$, $d\rho_2$, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ sont dans un plan, si

$$\alpha_1 d\rho_1 d\rho_2 = 0, \qquad \alpha_1\bar{v}_1\bar{v}_2 = 0,$$

et alors on a aussi

$$\alpha_2 d\rho_1 d\rho_2 = 0, \qquad \alpha_2\bar{v}_1\bar{v}_2 = 0.$$

4) $\delta_2 = p\delta_1$, les déplacements des extrémités du vecteur α sont parallèles l'un à l'autre.

Alors nous avons

$$\delta_\alpha = (p-1)\,\delta_1, \qquad \alpha_1\delta_1\delta_2 = 0, \qquad \alpha_2\delta_1\delta_2 = 0;$$

si $p = 1$, on a $\delta_2 = \delta_1$ et aussi

$$\delta_\alpha = 0, \qquad \alpha_2 - \alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = \alpha_1.$$

4') $d\rho_2 = p\,d\rho_1$ donné :

$$d\alpha = (p-1)\,d\rho_1, \qquad \alpha_1 d\rho_1 d\rho_2 = 0, \qquad \alpha_2 d\rho_1 d\rho_2 = 0,$$
$$\alpha' = (p-1)\,\bar{v}_1, \qquad \alpha_1\bar{v}_1\bar{v}_2 = 0, \qquad \alpha_2\bar{v}_1\bar{v}_2 = 0.$$

Le quadrilatère $\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2$ est plan. Le plus simple déplacement du vecteur α de α_1 en α_2 a lieu en ce plan. Si les déplacements des extrémités de α sont égaux, α peut être transporté de α_1 en α_2 par la translation δ_1, respectivement $d\rho_1$.

5) δ_1 est perpendiculaire au vecteur $(\alpha_1 + \alpha_2)$.

Alors nous avons

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \mid \delta_1 = 0, \qquad (\alpha_1 + \alpha_2) \mid \delta_2 = 0,$$

δ_2 est aussi perpendiculaire à ce vecteur.

$$\alpha_1 \mid \delta_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_1 \mid \delta_2 = 0$$

donnent

$$\alpha_2 \mid \delta_\alpha = 0.$$

$$\alpha_1 \mid \delta_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_2 \mid \delta_2 = 0$$

donnent

$$\alpha_2 \mid \delta_1 = \alpha_1 \mid \delta_2.$$

5′) Si $d\rho_1$ est perpendiculaire à $\alpha_1 \equiv \alpha$, nous obtenons

$$d\rho_1 \mid \alpha = 0, \qquad d\rho_2 \mid \alpha = 0.$$

$$\overline{v_1} \mid \alpha = 0, \qquad \overline{v_2} \mid \alpha = 0,$$

Si les déplacements des extrémités d'un vecteur α sont infiniment petits et si le déplacement de l'une de ses extrémités est perpendiculaire à la direction de ce vecteur, le déplacement de l'autre extrémité est aussi tel et alors les vitesses des extrémités sont précisément normales à cette direction.

2. — *La ligne droite.*

§ 4. — Considérons la droite $\mathfrak{AB}$ transportée de la position $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ à la position $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$; $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ et $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ étant des points homologues.

Comme une droite est déterminée par deux quelconques de ses points, la droite $\mathfrak{AB} = \sigma$ coïncide avec les droites $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 = \sigma_1$ et $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 = \sigma_2$, si deux points quelconques de σ coïncident avec des points correspondants de σ_1 et σ_2 et alors à cause de l'invariabilité de σ tous les groupes de deux points σ et σ_1, σ et σ_2 coïncident respectivement.

Prenons un point fixe arbitraire de l'espace comme pôle de