SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES

Autor(en): **Ripert, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5576

a, b, c, étant les côtés de l'heptagone convexe et des heptagones étoilés. On voit que cette équation fournit

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7;$$

d'autre part mon dernier théorème fournit

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ou

$$2bc - 2ab - 2ac = 0,$$

ajoutant la première et la troisième égalité, j'obtiens

$$(b + c - a)^2 = 7$$

ou

$$a + \sqrt{7} = b\ c.$$

Remarque. — Le côté de l'heptagone régulier convexe vaut 0,8677... et diffère peu du *double du module* des logarithmes vulgaires 0,8685...

Jos. Joffroy (Paris).

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES

1. — Les théorèmes suivants sont presque évidents :

A, B, C, D, E étant cinq points, les conjuguées harmoniques des droites AE par rapport à (AC, AD) et BE par rapport à (BC, BD) se coupent en un point F de la conique (ABCDE). — Car si l'on considère les points C, D, E, F comme fixes, on a, entre les rapports anharmoniques, la relation

$$A\,(CDEF) = B\,(CDEF) = -1.$$

En vertu du théorème de Chasles, les six points sont sur une conique.

Corrélativement, *a, b, c, d, e étant cinq droites, les conjugués harmoniques des points ae par rapport à (ac, ad) et be par rapport à (bc, bd) déterminent une tangente f à la conique $(abcde)$.*

Ces théorèmes donnent un moyen immédiat et indépendant de l'application du théorème de Desargues de construire *exclusivement* par points (ou tangentes) une conique dont on connaît cinq points (ou cinq tangentes).

2. — Si, dans le dernier théorème, on suppose la droite e à l'infini, il devient le suivant : *La parabole $(abcd)$, tangente aux trois côtés d'un triangle ABC et à une quatrième droite d qui coupe ces côtés en A', B', C', touche les six droites qui joignent le milieu de BC et $B'C'$, CA et $C'A'$, AB et $A'B'$, BC' et CB', CA' et AC', AB' et BA'.*

Prenons ABC pour triangle de référence (1) et soit $lx + my + nz = 0$ l'équation barycentrique de $A'B'C'$ ou d. On trouve aisément que les droites joignant les milieux de BC et $B'C'$, BC' et CB' ont pour équation

$$(1) \qquad l(m-n)x + (nl + lm - 2mn)(y - z) = 0$$

$$(2) \qquad x + \frac{my}{2l - m} + \frac{nz}{2l - n} = 0.$$

Ces droites touchent la parabole $(abcd)$ dont l'équation tangentielle est $\sum \frac{l(m-n)}{u} = 0$, et dont l'axe est parallèle à la droite δ qui joint les milieux des trois diagonales (AA', BB', CC') du quadrilatère complet $abcd$ $[\Sigma(nl + lm - mn)x = 0]$.

3. — Dans le premier théorème du n° 1, au point E correspondent six points F, car on peut opérer sur (AE, BE),... (CE, DE); il en est de même pour chacun des points A, B, C, D. On a donc 5 hexagones inscrits, donnant chacun 60 *pascals*. La figure des 5 hexagones et 300 pascals, dérivant du pentagone donné ABCDE, jouit de propriétés intéressantes que l'on peut déduire, par généralisation et dualisation, de celles de la figure

(1) Cette démonstration serait ici superflue si elle n'était nécessaire pour ce qui suit. J'observerai que cette propriété intéressante de la parabole tangente à quatre droites est assez facile à démontrer par les coordonnées cartésiennes pour que l'on puisse la proposer aux élèves comme exercice.

des 6 tangentes à la parabole n° 2 et des 60 *brianchons* correspondants. Je me bornerai à établir une de ces propriétés.

Désignons par a_1 et a_2 les droites (1) et (2), par b_1 et b_2, c_1 et c_2 celles que l'on obtient par permutation circulaire. *Les six droites* $(b_1\ c_1,\ b_2 c_2),\ldots\ (b_1\ c_2,\ c_1\ b_2),\ldots$ *sont parallèles.* Il est aisé de former leur équation; on trouve pour coordonnées de leur point commun à l'infini

$$(3) \qquad l\,(m - n)\,(3mn - nl - lm), \text{ etc.}$$

La tangente parallèle à cette direction a pour point de contact l'intersection de la parabole et de son diamètre δ. $[l\,(m-n)\,(3\,mn - nl - lm)^3$, etc.$]$.

D'où cette conséquence projective : soient a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 les six tangentes correspondant à la tangente e de la conique $(abcde)$, dont le point de contact est E. *Les six droites* $(b_1\ c_1,\ b_2 c_2,)\ldots\ (b_1 c_2,\ b_2 c_1),\ldots$ *concourent en un point M situé sur e. Le point de contact* E_1 *de la seconde tangente* e_1 *mené de M à la conique est tel que la droite* EE_1 *(ou* δ_e*), polaire de M, passe par les conjugués harmoniques du point d'intersection de e avec les trois diagonales (AA', BB', CC') du quadrilatère abcd, par rapport à (A, A'),...*

Et corrélativement, *pour la conique (ABCDE), les six points* $(B_1 C_1,\ B_2 C_2),\ldots\ (B_1 C_2,\ C_1 B_2),\ldots$ *sont sur une droite m passant par E*, etc.

Il existe d'autres propriétés. Ainsi le point (3) est le brianchon des hexagones $a_1 b_1 c_1\ a_2 b_2 c_2$ et $a_1 b_2 c_1\ a_2 b_1 c_2$. On trouvera des propriétés en examinant les brianchons des hexagones $a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2$ et $a_1 a_2 c_1 c_2 b_1 b_2$.

L. RIPERT (Poix, *Somme*).