LE COURS DE MÉCANIQUE DE Ch. CELLÉRIER

Autor(en): **Marcolongo, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5598

LE

COURS DE MÉCANIQUE DE CH. CELLÉRIER

Le Cours de Mécanique de Cellérier (1), que sa famille a publié en 1892, après la mort de l'auteur, est un de ces livres rares qui unissent la rigueur à la plus grande clarté de l'exposition. Ces qualités seules suffiraient à le recommander aux étudiants ; mais il est digne aussi d'être signalé à d'autres titres, car si Cellérier ne s'éloigne pas beaucoup, dans le fond, du système classique, si le plan de son ouvrage n'est pas si vaste que celui du grand traité de M. Appell, son livre est assez complet et l'exposition lui est tout à fait personnelle et, en plus d'un endroit, bien originale. Nous croyons donc qu'un exposé de la méthode suivie par l'auteur peut offrir quelque intérêt pour les lecteurs de l'*Enseignement Mathématique*.

De tout temps, on a discuté sur les principes fondamentaux de la Mécanique ; et le système classique et le système énergétique, dont l'un des représentants les plus illustres est Maxwell (2), ont essayé les critiques les plus variées. Dans ces derniers temps, surtout après la publication, en 1894, du livre de HERTZ (3), des tentatives sérieuses de fonder la Mécanique sur des bases nouvelles (4) ont fait sentir la nécessité d'une revision du système classique, que bien des savants croient encore le plus naturel et

(1) Cours professé à l'Université de Genève. — Paris, librairie Gauthier-Villars.

(2) Voir le petit et si intéressant livre de MAXWELL : *Matter and Motion*.

(3) Voir dans le nº 4 (1901) de cette *Revue*, l'article de M. COMBEBIAC : *Les idées de Hertz sur la Mécanique*.

(4) MAGGI. *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi*, Milano 1896. Voir aussi le savant article de M. Maggi dans le nº 3 (1903) de cette Revue.
LOVE A. *Theoretical mecanics an introductory treatise on the principles of Dynamics with applications and numerous examples.* Cambridge, 1897.

le plus simple, et auquel on peut donner toute la rigueur désirable si l'on fixe mieux quelques points et quelques définitions [1].

Le livre de Cellérier répond bien à cette manière d'envisager la Mécanique. L'auteur évite, autant que possible, les calculs trop longs et compliqués, en employant souvent de simples considérations géométriques, en esquissant même de courtes démonstrations des propriétés d'Analyse et de Géométrie dont il a besoin [2]. Ainsi, presque toute la Cinématique (ch. III) découle, d'une manière fort élégante, de la simple condition d'invariabilité d'un système (§ 40), c'est-à-dire que si A et A′ sont deux points d'un solide, les projections des vitesses de A et A′ sur la droite AA′, prises dans le même sens, sont égales.

Chaque transformation, le choix même d'une variable auxiliaire, est plutôt le résultat d'un raisonnement qu'un artifice de calcul. Bien des problèmes ne sont pas seulement réduits aux quadratures, mais ils sont soumis à une discussion approfondie qui en fait ressortir toutes les propriétés. Signalons entre autres le problème de la chaînette; celui du mouvement dû à une force centrale (§ 56 et § 60); d'un point pesant attiré vers un point fixe en raison inverse du carré de la distance (§ 64) ; le problème du pendule conique (§ 68) ; l'exposition bien simple et originale des mouvements, en tenant compte des mouvements terrestres (§ 71). Souvent des exemples numériques achèvent les solutions.

L'auteur, naturellement, maintient encore l'ancienne division de la Mécanique et son livre commence par la Statique [3], qui

(1) Siacci. *Sulla composizione della forze nella Statica, sui suoi postulati e sui principi della Meccanica.* Rend. Acc. di Napoli : febbr. e marzo 1899. Voir aussi le remarquable cours de Mécanique professé par M. Siacci à l'Université de Naples et qui est seulement lithographié.

(2) Dans les traités modernes, on a voulu bannir certaines démonstrations simples dont abondent les livres anciens, surtout ceux classiques de Huygens et Newton et même les écrits de Galilei. Peut-être la difficulté qu'on a à les lire les a fait oublier. Par exemple, la théorie du mouvement d'un point pesant sur une cycloïde telle qu'elle a été exposée par Huygens et surtout par Newton (*Principia Lib.* I, Sect. 10^a) dans un cas plus général (sur l'épicycloïde) et qui au fond se réduit à prouver que le mouvement d'un point, sur une courbe, sous l'action d'une force tangentielle proportionnelle à l'arc, est tautochrone, avec les notations modernes est, je crois, bien plus simple que celle que l'on trouve dans tous les traités ; et ainsi les propriétés des forces centrales telles que Newton (*ibidem*) les a démontrées. A ce point de vue, le livre déjà cité de Maxwell est vraiment précieux.

(3) Peut-être il est préférable, dans un cours, de commencer par la Cinématique, comme on le fait presque généralement en Italie.

est précédée par un court exposé de la théorie des vecteurs (composition des segments ; introduction).

Dès le début de la Statique figure, comme principe fondamental, le principe des vitesses virtuelles; conformément aux idées de Gauss, l'auteur l'énonce ainsi : *pour que des forces appliquées à un système théorique en repos se fassent équilibre, il faut et il suffit que, pour tout déplacement infiniment petit du système compatible avec ses liaisons ou avec les obstacles à son mouvement, la somme des travaux des forces soit nulle ou négative* (1).

« Système théorique », c'est un ensemble de solides (systèmes indéformables) dont les mouvements puissent être gênés par leur contact, soit entre eux, soit avec des appuis extérieurs fixes. On pourrait, je crois, élever des doutes au moins sur l'opportunité de l'exposition du principe fondamental dès le début. Ce n'est pas, dans ses lignes générales, la marche qu'ont suivie les mécaniciens (2) ; et l'on ne peut encore accepter pour bien rigoureuse la démonstration de l'auteur (§ 8). Mais une fois ce principe admis, comme une loi fondamentale, toute la Statique en découle d'une manière bien simple et rigoureuse. Le court exposé suivant en pourra donner une idée.

Si les liaisons du système permettent deux déplacements *opposés* (invertibles), la somme des travaux des forces est zéro. Un déplacement invertible est dit *normal ;* le système lui-même est normal si tous ses déplacements sont normaux.

---

(1) Gauss. *Ges. Werke* Bd. V. s. 35. Les idées de Gauss ont été développées par Clausius (*De la fonc. potentielle et du potentiel*) et par Neumann. Gauss (*ibidem* s. 27 en note) dit :

« Der gewöhnliche Ausdruck setzt stillsschweigend solche Bedingungen voraus, dass die jeder möglichen Bewegung entgegensetzte gleichfalls möglich sei, wie z. B. dass ein Punkt auf einer bestimmten Fäche zu bleiben genöthigt, dass die Entfernung zweier Punkte von einander unveränderlich sei u. dgl. Allein dies ist eine unnöthige und der Natur nicht mehr angemessene Beschränkung. Die Oberfläche eines undurchdringlichen Körpers zwingt einen auf ihr befindlichen materiellen Punkt nicht, auf ihr zu bleiben, sondern verwehrt ihm bloss das Austreten auf die eine Seite ; ein gespannter, nicht ausdehnbarer aber biegsamer Faden zwischen zwei Punkten nicht die Abnahme der Entfernung unmöglich u. s. w. Warum wollten wir also das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten nicht lieber gleich anfangs so ausdrücken, dass es *alle* Fälle umfasst ? »

(2) Nous avons maintenant des connaissances bien plus précises sur la statique des Grecs. Voir l'intéressant article de M. Vailati : *Il principio dei lavori virtuali da Aristotile ad Erone*, Atti R. Acc. d. Toxino. Vol. XXXII, page 940.

Deux systèmes de forces U, V, sont équivalents relativement à un solide, gêné d'une manière quelconque, si pour tous les déplacements qu'ils permettent, la somme des travaux virtuels est la même pour U et V. Si le solide est libre, U et V sont équivalents d'une manière absolue et l'on démontre que l'effet des forces U sur un ensemble de solides ne sera pas changé si l'on substitue les forces U par V. La résultante de plusieurs forces appliquées à un même point est, par définition, la résultante des droites géométriques correspondantes, considérée comme une force. L'application du principe fondamental donne alors que le travail de la résultante est la somme des travaux des composantes et, par suite, la résultante est équivalente au système de ses composantes. La considération des conditions d'équilibre d'un solide qui ne peut que tourner autour d'un axe fixe introduit la notion de moment d'une force par rapport à un axe, dont on démontre aussi les plus importantes propriétés. Pour les transformations des forces agissant sur un solide, on peut appliquer les transformations élémentaires, c'est-à-dire : transport du point d'application et substitution de plusieurs forces appliquées à un point par leur résultante. Six nombres y jouent un rôle fondamental ; ce sont les sommes L, M, N des projections des forces sur trois axes et celles P, Q, R de leurs moments par rapport aux mêmes axes, qui restent invariables pour ces transformations et dont les propriétés les plus essentielles résultent de simples réductions. Les conditions d'équilibre d'un solide dans plusieurs cas, le calcul direct des sommes L.... R par rapport à des axes orthogonaux, la théorie des couples terminent cette première partie.

Le chapitre II (applications de la Statique) contient encore quelques observations sur le principe des vitesses virtuelles, qui se rattachent à l'exposition fort détaillée d'une méthode générale, la plus propre pour résoudre les questions si variées de Statique. Cette méthode aussi est plus avantageuse dans les applications, car, en général, la considération de tous les déplacements possibles d'un système est fort compliquée [1].

---

[1] M. Cerruti, dont j'ai eu le bonheur d'être l'élève et l'assistant pendant plusieurs années, bien avant la publication du livre de Cellérier, dans son cours à l'Université de Rome, qui malheureusement n'est pas imprimé, expose en plusieurs endroits des idées et des méthodes très analogues à celles de Cellérier.

Les déplacements considérés comme impossibles sont dits *exclus*, tandis que les autres sont *admissibles* ; alors la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est que la somme des travaux virtuels des forces soit nulle ou négative pour tous les déplacements admissibles. De plus, un système n'est pas toujours normal ; par exemple : deux solides en contact et qui peuvent se séparer ; un fil flexible et inextensible. Des considérations faciles peuvent réduire le système normal et à liaisons complètes ; ainsi dans le treuil l'arbre tourne autour de son axe ; il peut être disposé de manière à être soulevé de ses soutiens ; mais si nous considérons que les deux forces dont on cherche l'équilibre ne peuvent produire ce soulèvement, on ne peut pas avoir égard à cette circonstance et alors le système devient normal et à liaisons complètes. Les systèmes matériels auxquels la méthode s'applique sont un ensemble de matière qui peut contenir des corps de toute espèce, solides, élastiques, fluides, et même des portions de corps. Les forces qui agissent sur un point du système proviennent d'un corps qui appartient au système et alors elles sont dites *intérieures* ; ou bien elles proviennent d'un corps qui n'en fait pas partie, et alors elles sont dites *extérieures*. La méthode enfin repose sur les principes suivants :

1° *Pour établir les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement d'un système matériel, on peut remplacer tout corps en contact avec lui ou gênant son mouvement par les forces extérieures qu'il exerce sur lui.*

Les forces qui existent toujours au contact de deux corps et qui proviennent de la résistance à la pénétration, à la déformation, ou de leur cohésion, sont dites *forces de contact*; alors

2° *Si un système matériel quelconque est en équilibre et en repos et qu'on remplace les obstacles à son mouvement par les forces de contact, les forces extérieures qui agissent sur lui, y compris celles-là, satisfont les conditions d'équilibre d'un solide entièrement libre ;*

3° *Soient A et B deux systèmes matériels agissant l'un sur l'autre en équilibre et en repos, les coordonnées des forces* [1] *exercées*

---

[1] Les sommes L, M,.... R s'appellent les coordonnées d'un système.

par A sur B sont égales et de signe contraire aux coordonnées analogues des forces exercées par B sur A.

C'est le principe de l'action égale et contraire à la réaction.

Ces principes suffisent à établir les conditions d'équilibre, en introduisant les forces de contact inconnues et en écrivant pour chaque solide séparément ses conditions d'équilibre comme s'il était libre. Des nombreuses applications aux problèmes les plus variés, même lorsqu'on a égard au frottement, éclaircissent la méthode qui n'est certainement pas nouvelle, mais qui se trouve établie d'une manière générale et rigoureuse.

La loi d'inertie (¹) et le principe des mouvements relatifs sont les fondements de la Dynamique. Le principe de l'indépendance de l'action des forces, dans le cas où elles agissent suivant la même droite, conduit à la propriété que « *pour un même point, l'accélération due à une force constante lui est proportionnelle* » et, par conséquent, à la notion de masse ; si les forces ne sont pas dirigées suivant la même droite, on a la règle du parallélogramme dans le cas où le point est en mouvement.

Le principe de d'Alembert (§ 88) que l'auteur démontre à peu près comme le grand philosophe (Traité de Dynamique, 1743, 2e partie, chap. I.) amène l'auteur à examiner de nouveau et à un autre point de vue le principe des vitesses virtuelles dans le cas du mouvement.

Les systèmes pour lesquels les relations entre les variables des solides ne sont que des équations (systèmes holonomes de Hertz) sont dits *stricts ;* les autres, auxquels correspondent aussi des inégalités, sont des systèmes *non stricts*. Les équations de contact sont toutes les équations dues aux liaisons, en leur joignant, si le système n'est pas strict, les inégalités changées en égalités. Les systèmes stricts pour lesquels sont possibles seulement des mouvements tels que les équations de contact soient constamment satisfaites (*mouvements réguliers*) sont des systèmes normaux ; dès lors (§ 97) :

Si le système est en repos ou a un mouvement régulier, les tra-

(¹) Sur ce principe et sur son interprétation comme loi d'expérience, on peut voir l'excellent mémoire de M. Masci : *Sul concetto del movimento.* Acc. d. Sc. Mor. e Politiche d. Soc. Reale di Napoli, 1892.

vaux des forces de contact correspondant à un déplacement régulier infiniment petit quelconque ont une somme nulle.

De là s'en suit la seconde forme des équations du mouvement d'un système (§ 98), les équations de Lagrange, le principe des forces vives. Le cas où les liaisons sont fonctions du temps (§ 101) est considéré à part.

L'auteur ne se tient nullement à ces principes généraux ; au contraire, on peut dire que presque toutes les questions les plus vitales de la Mécanique trouvent place dans son livre, comme les éléments de la théorie de l'attraction, la Mécanique des corps déformables, qui, je crois, ne devrait plus manquer désormais dans un cours de Mécanique, et ses applications à l'Hydrostatique, à l'Hydrodynamique et à l'Hydraulique.

Au contraire, la partie qui traite du mouvement d'un corps autour d'un point fixe, si importante pour les applications de l'analyse, n'a pu trouver dans le livre de Cellérier le développement qui lui convient à présent.

Pour mettre dans tout son jour cette théorie, il faudrait introduire d'autres définitions [1].

Et puisqu'il s'agit d'un livre pour les élèves, on peut aussi regretter l'absence complète d'exercices, dont au contraire abondent les livres anglais, surtout ceux récents de MM. Love et Routh. Mais comme, surtout en France, on ne manque pas d'excellents recueils d'exercices de mécanique, cette omission ne saurait diminuer la valeur de cet intéressant traité.

R. MARCOLONGO (Messine).

---

[1] Cette théorie, comme on sait, a été l'objet d'études intéressantes de M. KLEIN (*Théorie des Kreisels*). En introduisant la notion si simple d'impulsion, bien plus claire que celle de quantité de mouvement, toutes les lois du mouvement d'un corps solide découlent de la deuxième loi de Newton énoncée sous une forme entièrement semblable à celle du mouvement d'un point. En outre, cette notion est la plus propre à faire ressortir les liens entre l'énergie cinétique et les composantes de l'impulsion et du mouvement hélicoïdal correspondant.