SUR UN QUADRILATÈRE BIRECTANGLE

Dans le numéro du 15 septembre de l'*Enseignement mathématique*, M. Cl. Vidal a bien voulu consacrer quelques mots à la note I de mon volume *la Géométrie non-euclidienne*. La parfaite courtoisie de son article me fait un devoir de lui répondre, et me met en même temps tout à fait à l'aise pour déclarer que plus que jamais je tiens son théorème comme non démontré et ma critique comme valable.

J'avouerai même ingénuement que, comme M. Vidal, et comme beaucoup d'autres, j'ai été moi aussi, pour employer les mêmes expressions que mon honorable contradicteur mais en leur donnant un sens diamétralement opposé, j'ai été, dis-je, *engagé autrefois à fond dans l'aventure non-euclidienne*, — je veux parler de la poursuite de cette insaisissable chimère qu'est la démonstration du postulatum d'Euclide — ; je confesserai que j'ai cru la tenir un instant, et que j'ai eu *quelque peine à revenir de mon erreur*. Si vraiment je suis non-euclidien, ce n'est donc pas de parti-pris, mes ouvrages en fournissent la preuve ; et au contraire, il faut le proclamer bien haut, les patientes recherches de Lobatschewsky, Bolyai, Riemann et leurs continuateurs, loin de ternir la gloire d'Euclide et de porter atteinte à son œuvre, ne font que rendre plus éclatante à nos yeux l'admirable perspicacité du géomètre grec qui, entre trois voies possibles au même titre, a su choisir la plus simple et la plus commode. Quand il répondait à Ptolémée qu'il n'y a pas de *route royale en géométrie*, il se calomniait à son insu ; tous ses efforts tendaient au contraire à créer une géométrie vraiment reine entre toutes les autres par son incomparable harmonie.

Le théorème en litige est celui-ci :

Si dans un quadrilatère ABCD *birectangle en* A *et* B, *l'angle* C *est obtus ou aigu, inversement, l'angle D est aigu ou obtus* [1].

Je résume et critique la démonstration de M. Vidal comme il suit [2] :

« 1° Supposons d'abord que l'angle C soit obtus, et tirons successivement CE perpendiculaire à CD et coupant AB, EF perpendiculaire à AB et coupant CD, FG perpendiculaire à CD et ainsi de suite (fig. 1).

« Nous finirons par aboutir à une perpendiculaire MN à CD, obtenue après un nombre *limité* d'opérations et coupant BD au point N. Alors dans le triangle rectangle MDN, l'angle D est aigu.

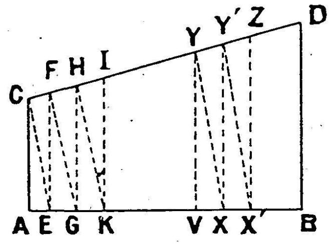

Fig. 1.

« L'existence de la perpendiculaire MN est en effet certaine lorsque les distances AE, EG, GK, ... etc., ne peuvent pas tomber au-dessous de toute longueur assignable; dans ce cas le raisonnement donné par l'auteur à la page 7 de son livre est exact. Mais il cesse de l'être si ces distances forment une suite décroissante et convergente, puisqu'à la limite de cette suite répondrait une perpendiculaire commune XY coupant AB et CD ensemble ou leurs prolongements ensemble. Lorsque XY coupe AB, D est aussi un angle obtus.

« Supposons maintenant l'angle C aigu et tirons AF perpendiculaire sur CD, FE perpendiculaire sur AB, EH perpendiculaire sur CD, et ainsi de suite... » Pour abréger, et ne pas abuser de l'attention du lecteur, je renvoie à la page 344 du n° cité de l'*Enseignement mathématique*. Au résumé, la proposition de M. Vidal est fausse », telle est ma conclusion.

A mon argumentation, mon contradicteur répond :

« *Aucune des distances consécutives AE, EG... ne peut être nulle, cette impossibilité se justifiant pour chacune d'elles comme pour AE l'une d'elles.* »

Ceci est parfaitement exact, mais ce qui suit dans la réponse ne l'est plus. Elle continue en effet en ces termes :

---

(1) Cl. Vidal. *Pour la Géométrie euclidienne*, Paris, Croville Morant, 1900.

(2) *La Géométrie non-euclidienne*, (Scientia), Naud 1902, et l'*Enseignement Mathématique* 1902. page 343.

« *Dire d'ailleurs qu'aucune des distances AE... ne peut être nulle, c'est dire qu'aucune d'elles ne peut tomber au-dessous de toute longueur assignable : il n'y a en effet que les longueurs pouvant devenir nulles dont on puisse dire qu'elles peuvent tomber au-dessous de toute longueur assignable.* »

Les maîtres chargés de la difficile mission de faire entrer dans les jeunes intelligences la notion si délicate de *limite* auront sans doute quelque peine à souscrire à une pareille assertion. On dit qu'une grandeur a zéro pour limite quand elle décroît constamment de façon à devenir et à demeurer ensuite inférieure à toute grandeur assignable de même espèce. Ainsi, pour emprunter à la géométrie élémentaire un de ses exemples les plus caractéristiques, la différence P-p entre les périmètres de deux polygones réguliers convexes, le premier circonscrit, le deuxième inscrit à une circonférence donnée, et ayant n côtés, peut tomber au-dessous de toute longueur assignable dès que n dépasse un certain minimum que l'on sait déterminer; mais cette différence ne peut jamais devenir nulle. Si, d'accord avec les métaphysiciens, nous admettons l'existence de l'*atome linéaire*, c'est-à-dire de la longueur telle qu'il n'en saurait exister de moindre, on pourra augmenter graduellement le nombre commun n des côtés des deux polygones jusqu'au moment où P-p sera devenue égale à l'atome, mais c'est tout. Les polygones réguliers obtenus à cet instant seront les derniers, et il sera impossible de circonscrire et d'inscrire à la circonférence donnée de nouveaux polygones ayant plus de côtés qu'eux. C'est en ce sens que les trois expressions : *P-p a zéro pour limite*, *peut tomber au-dessous de toute longueur assignable*, *peut devenir égale à l'atome linéaire*, sont équivalentes mais il demeure entendu que P-p ne peut jamais être nulle.

Tout ce qui précède a été dit maintes fois ; c'est principalement dans les ouvrages du regretté J. Bonnel que ces idée sont été le plus clairement et minutieusement exposées [1].

Par ces motifs, rien n'empêche qu'il ne se passe quelque chose

[1] *Les atomes dans la Géométrie*, 1899. *Notes sur les systèmes de géométrie et l'atome*, 1900. *La Géométrie atomique rationnelle*, 1902. (Voir aussi l'*Ens. Math.*, t. IV, p. 27, 167 et 429, *Réd.*).

de semblable pour les distances AE, EG... Si aucune d'elles ne peut être rigoureusement nulle, en vertu de la construction employée, il ne leur en est pas moins permis de décroître sans cesse et par conséquent, dès que n dépasse un certain nombre, la n^e peut tomber au-dessous de toute longueur assignable et devenir égale à l'atome sans pour cela être nulle. Qu'arrive-t-il donc à ce moment? Tout simplement ceci :

Soit VX la distance devenue égale à l'atome, VY étant perpendiculaire sur AB en V, et YX perpendiculaire sur CD en Y (fig. 1). Si l'on menait en X la perpendiculaire XY′ sur AB, et en Y′ la perpendiculaire Y′X′ sur CD, XX′ serait moindre que VX puisque tout intervalle est supposé plus petit que le précédent ; mais VX est atome, donc XX′ ne saurait exister, c'est-à-dire qu'il est impossible de mener en X sur AB une perpendiculaire XY′ distincte de XY, et qu'au moment où l'on a atteint le point X la construction de M. Vidal se trouve arrêtée. C'est pour cela que nous devons appeler XY la perpendiculaire limite, commune à la fois à AB et à CD.

Nous parviendrons au même but par une autre voie parfaitement légitime, et qui va nous permettre, ce qui est dans la question d'un intérêt capital, d'analyser de plus près les intervalles successifs AE, EG.... et de nous rendre compte de la manière dont ils se comportent.

Dans ses deux admirables productions, l'*Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique* et l'*Essai de géométrie analytique générale*, l'éminent académicien belge M. de Tilly a montré que toute la métagéométrie pouvait découler de la notion de distance, considérée comme seule notion première et intuitive, et que par conséquent l'hypoténuse a d'un triangle rectangle, l'un de ses côtés b et l'angle compris α pouvaient être liés par l'une des deux relations

$$\text{(E)} \qquad b = a \cos \alpha,$$

$$\text{(M)} \qquad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos \alpha,$$

dont la seconde s'applique aux hypothèses non-euclidiennes, tg$a$ et tg$b$ étant tour à tour des fonctions circulaires ou hyperboliques suivant que l'on se place dans le système de Riemann ou dans celui de Lobatschewsky, tandis que la première relation, cas particulier de la deuxième, et servant de transition en même temps que de limite commune aux deux systèmes qui précèdent, caractérise le système usuel ou euclidien. Ce point fondamental acquis, considérons un triangle rectangle OAC où les angles OAC et OCA sont aigus (fig. 2). D'un point D de OC prolongée abaissons DB perpendiculaire sur OA aussi prolongée, et puisque l'angle ACD est obtus, appliquons au quadrilatère ABCD la première construction de M. Vidal.

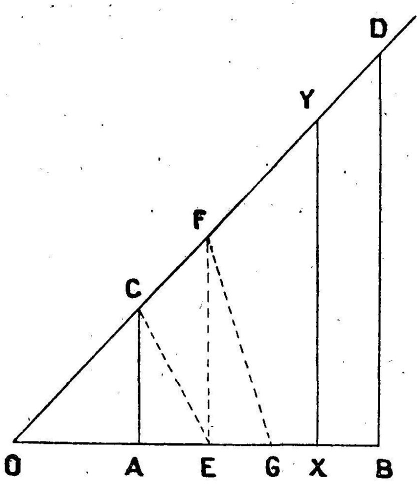

Fig. 2.

Nous avons dans le cas de (E)

$$\frac{EG}{AE} = \frac{1}{\cos^2 O}, \tag{1}$$

et dans le cas de (M)

$$\frac{tg\, EG}{tg\, AE} = \frac{\cos^2 O\,(\cos O^2 + \varepsilon\, tg^2 OA)}{\cos^6 O + \varepsilon\, tg^2\, OA}, \tag{2}$$

ε étant $+1$ quand les tangentes sont circulaires, et -1 quand elles sont hyperboliques.

Il est parfaitement évident que dans le système usuel comme dans le système lobatschewskien EG est toujours plus grand que AE, et qu'alors, ainsi que le démontre M. Vidal, l'angle CDB est aigu. On s'assurerait d'ailleurs sans peine qu'il est égal ou inférieur à OCA qui est aussi aigu.

Mais il n'en est plus de même, comme nous allons le voir, dans la géométrie de Riemann. En effet, comparons à l'unité le rapport $\frac{tg\, EG}{tg\, AG}$, en faisant $\varepsilon = 1$;
l'inégalité

$$\frac{tg\, EG}{tg\, AE} \gtreqless 1$$

équivaut, d'après (2) à la suivante :

$$1 \gtreqless \frac{tg\, OA}{\cos^2 O} = tg\, OE.$$

Il en résulte donc ceci :

Soit 2Δ la distance maxima des points de l'espace fini.

Tant que OE est inférieure à $\frac{\Delta}{2}$, EG est plus grande que AE et les intervalles successifs croissant, le raisonnement de notre auteur est valable.

Quand OE égale $\frac{\Delta}{2}$, on a AE $=$ EG, ce qui serait facile à prouver directement.

Enfin, quand OE est plus grand que $\frac{\Delta}{2}$, EG est moindre que AE, donc les intervalles successifs vont certainement en décroissant. Voici un fait nouveau qui appelle toute notre attention, car la question se pose immédiatement de savoir si leur suite est divergente ou convergente; dans le premier cas M. Vidal a raison, et dans le deuxième il a tort. Or la suite est parfaitement convergente, comme nous allons le voir.

D'abord l'intervalle de rang n peut tomber, sans être nul, au-dessous de tout intervalle assignable, car sa valeur est évidemment donnée par

$$\operatorname{tg} \mathrm{PR} = \operatorname{tg}(\mathrm{OR} - \mathrm{OP}) = \frac{\dfrac{\operatorname{tg} \mathrm{OA}}{\cos^{2n+2} \mathrm{O}} - \dfrac{\operatorname{tg} \mathrm{OA}}{\cos^{2n} \mathrm{O}}}{1 + \dfrac{\operatorname{tg}^2 \mathrm{OA}}{\cos^{4n+2} \mathrm{O}}} = \frac{\operatorname{tg}\mathrm{OA} \sin^2 \mathrm{O} \cos^{2n} \mathrm{O}}{\cos^{4n+2} \mathrm{O} + \operatorname{tg}^2 \mathrm{OA}}.$$

η désignant un nombre aussi petit que nous voudrons, tg PR sera moindre que η *a fortiori* si nous avons

$$\cos^{2n} \mathrm{O} < \frac{\eta \operatorname{tg} \mathrm{OA}}{\sin^2 \mathrm{O}},$$

et l'on pourra toujours choisir n de façon à ce qu'il en soit ainsi. Ensuite la somme des intervalles successifs a une limite, car

$$\operatorname{tg} \mathrm{AP} = \frac{\operatorname{tg} \mathrm{OA}(1 - \cos^{2n+2} \mathrm{O})}{\cos^{2n+2} \mathrm{O} + \operatorname{tg}^2 \mathrm{OA}}$$

a pour limite $\frac{1}{\operatorname{tg} \mathrm{OA}} = \operatorname{tg}(\Delta - \mathrm{OA})$. Donc il existe sur OA prolongée, à la distance Δ — OA un point X tel que la perpendiculaire XY abaissée de ce point sur CD l'est aussi sur AB puisque OX $= \Delta$; par suite, dans le quadrilatère ABCD où A et B sont droits et C obtus, l'angle D est aigu quand AB est moindre que AX, droit si AB égale AX, et obtus encore quand AB est plus grand que AX.

Nous croyons inutile de développer le cas où dans le quadrilatère ABCD l'angle C est aigu; l'angle D peut être, en vertu de calculs de même nature que ceux qui précèdent, tantôt obtus, tantôt aigu.

Enfin, il est un troisième mode d'envisager la question qui nous occupe, et ce mode, c'est M. Vidal lui-même qui nous l'offre. *Au fond*, dit-il, *il s'agit de savoir si les angles correspondants successifs ACD, EFD,... sont tous obtus ou aigus*. Voilà qui est excellemment parler, et l'on ne peut que remercier et féliciter tout ensemble notre auteur d'avoir posé le problème en termes si précis. Prenons donc la figure I et suivons y le mode de construction indiqué. Les angles successifs ACD, EFD, GHD... sont obtus depuis le premier jusqu'au n^e inclusivement, c'est entendu. Mais il ne fallait pas s'arrêter là et se hâter de conclure. Il fallait les examiner d'un peu plus près, et étudier leur mode de variation. Sont-ils croissants, constants ou décroissants? C'est un détail qui a bien son importance, puisque le résultat final doit en dépendre. Or, ils sont croissants dans la géométrie de Lobatschewsky, constants dans celle d'Euclide et décroissants dans celle de Riemann; donc le raisonnement critique n'est admissible que pour les deux premières.

Passons donc à la troisième. Nous savons qu'une grandeur A qui décroît sans cesse tout en demeurant plus grande qu'une grandeur fixe A′ de même espèce a une limite L égale ou supérieure à cette grandeur fixe. Par suite, les angles obtus EFD, GHD... décroissants de la figure I ont une limite égale ou supérieure à un angle droit. Supposons que cette limite soit l'angle obtus XY′D, XY′ étant perpendiculaire sur AB. Elevons Y′X′ perpendiculaire sur CB et coupant AX prolongée, puis X′Z perpendiculaire sur AB. L'angle X′ZD doit être moindre que l'angle XY′D puisque la suite est toujours décroissante; mais alors cette suite décroissante et convergente renfermerait un terme moindre que sa limite, ce qui est absurde. Donc la limite des angles obtus décroissants est un angle droit, donc XY′ est perpendiculaire commune à AB et à CD.

Conclusion : si AB est plus grand que AX, l'angle C étant obtus, D est aussi un angle obtus.

P. Barbarin (Bordeaux).