Em. Borel. — Leçons sur les séries divergentes. Un volume in-8°, III183 p.; prix : 4 fr. 50 ; Paris, Gauthier-Villars, 1901.

contient 1 800 *dispositions* d'épures qui sont aussi des exercices pour que l'élève puisse appliquer ce qu'il apprend, et comme ces dispositions représentent autant d'épures dont l'auteur a dû choisir les données pour que chaque tracé s'effectue complètement dans les limites de la feuille du dessin, — souvent il y a plusieurs dispositions pour un même problème, — on voit le travail colossal que M. Beyel a dû entreprendre à leur sujet; on comprend la facilité qu'elles donnent aux professeurs pour indiquer aux élèves, sans étude préalable, des exercices toujours exécutables jusqu'à la fin et éviter aux élèves, qui s'exercent d'eux-mêmes dans cette discipline, les fastidieux essais qu'ils font trop souvent, lorsqu'ils prennent les données au hasard, avant d'arriver à une épure bien disposée dans tous ses détails pour l'exécution complète. Ces 1800 dispositions seules donneraient à l'ouvrage une très grande valeur; malheureusement pour nous, le livre de M. Beyel est écrit en allemand, ce qui empêchera beaucoup de professeurs, en France, de pouvoir l'étudier et soumettre ces idées nouvelles à la sanction de leur expérience; mais je sais que si l'auteur trouve un accueil favorable auprès de ceux que la diversité de la langue n'arrête pas, il donnera très volontiers par une traduction, la possibilité à tous, de profiter de son énorme travail; c'est ce que je souhaite à tous les futurs professeurs ou étudiants qui auront à enseigner les méthodes de la Géométrie descriptive ou à les apprendre dans les pays de langue française.

E. Lemoine (Paris).

Em. Borel. — **Leçons sur les séries divergentes.** Un volume in-8°, III-183 p.; prix : 4 fr. 50; Paris, Gauthier-Villars, 1901.

La théorie des séries divergentes a pour objet la résolution du problème suivant :

Une suite :

$$a_0, a_1, a_2, \dots a_n \dots$$

étant donnée, définir une opération $\mathcal{S}$ qui lui fasse correspondre un élément $\mathcal{S}[a_n]$ doué des propriétés suivantes :

a. Il est unique.

b. Il est égal à la somme S de la série Σa_n, si cette série est convergente.

c. Par rapport à l'addition, l'opération $\mathcal{S}$ doit vérifier la loi distributive

$$\mathcal{S}[a_n + b_n] = \mathcal{S}[a_n] + \mathcal{S}[b_n].$$

d. Par rapport à la multiplication, l'opération $\mathcal{S}$ doit vérifier la relation :

$$\mathcal{S}[a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0] = \mathcal{S}[a_n] . \mathcal{S}[b_n].$$

e. Si a_n est symbole de fonction analytique d'une variable (réelle ou complexe) z, on doit pouvoir définir un champ dans lequel $\mathcal{S}[a_n(z)]$ est fonction analytique uniforme de la variable z.

f. Si on représente par φ une opération qui résulte de l'application d'un nombre fini d'opérations fondamentales du calcul algébrique et intégral, et si l'on représente par

$$[\varphi[a_n(z)]]$$

la série qu'on obtient en opérant sur les $[a_n(z)]$ avec les règles du calcul des séries convergentes, on doit avoir :

$$\varphi(\mathcal{S}[a_n(z)]) = \mathcal{S}[\varphi[a_n(z)]].$$

On comprend aisément que si les éléments a_n sont donnés d'une façon tout à fait arbitraire, il ne sera pas possible de satisfaire toutes ces conditions.

La question serait de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour les éléments a_n afin qu'une semblable opération $\mathcal{S}$ puisse se définir.

Il n'est pas possible de répondre d'une façon complète à cette question. On a donné toutefois une suite de conditions suffisantes, de plus en plus larges, qui ont pour point de départ l'hypothèse de la convergence de la série Σa_n, et qui embrassent successivement, des séries de plus en plus divergentes.

L'ouvrage de M. Borel a justement pour but l'exposition systématique des méthodes suivies, des recherches faites, des résultats obtenus et des applications à la théorie des fonctions.

Après une introduction historique savante et suggestive, il expose les méthodes qui sont indiquées dans les travaux de Cauchy sur la série de Stirling et de Stieltjes sur le logarithme intégral.

Une méthode plus générale est celle que M. Poincaré a développée dans un mémoire *sur les intégrales singulières des équations différentielles* (Acta Math. t. VIII).

Considérons une fonction $\mathcal{J}(z)$ et le développement

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

On dira, d'après M. Poincaré, que ce développement, qui peut être divergent, représente *asymptotiquement* la fonction, si la différence

$$\mathcal{J}(z) - \left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_n}{z^n}\right)$$

est, lorsque z croît indéfiniment, d'un ordre de grandeur inférieur à $\frac{1}{z^n}$.

Le principe de M. Poincaré consiste à constater que la correspondance ainsi définie entre une fonction et une série asymptotique se conserve dans la plupart des opérations simples.

La différentiation seule, est en général exclue.

La théorie de Stieltjes sur la conversion des séries divergentes en fractions continues peut être envisagée au point de vue suivant :

On demande de définir un algorithme qui fasse correspondre à la suite

$$a_0, a_1, a_2 \dots a_n \dots$$

des termes d'une série divergente, Σa_n, la suite des quotients incomplets

$$b_0, b_1, b_2 \dots b_n \dots$$

d'une fraction continue convergente

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \dots}}$$

Le nombre $S[a_n]$ sera dès lors donné par la valeur d'une telle fraction continue puisqu'on peut prouver que : si $y_1, y_2, \dots y_n$, sont des séries de Stieltjes (c'est-à-dire des séries pour lesquelles est possible la représentation demandée en fraction continue convergente), si $\psi(y_1, y_2, \dots y_n, y_1', y_2' \dots y_n^{(\lambda)})$ est un polynome par rapport à ces fonctions et à leurs dérivées, ce polynome est une série de Stieltjes que l'on obtient en calculant sur les séries $y_1, y_2 \dots y_n$ comme si elles étaient convergentes, et l'on a

$$\psi(y_1, y_2 \dots y_n^{(\lambda)}) = 0$$

dans le cas, et dans le cas seulement où la série de Stieltjes obtenue pour ψ est identiquement nulle.

On a des critères qui donnent des conditions suffisantes pour qu'une série soit de Stieltjes. et l'on peut toujours remplacer la fraction continue qui représente une série de Stieltjes par une intégrale définie.

Malheureusement cette belle théorie n'a pas une grande étendue. Il suffit que l'on ait

$$|a_n| > B(2n+1)!,$$

B quantité positive, pour toutes les valeurs de n supérieures à un nombre donné, pour que la série Σa_n ne soit pas de Stieltjes.

En outre ces séries ne sont aptes qu'à représenter des fonctions analytiques admettant comme unique singularité un segment rectiligne. Le champ des applications est donc forcément assez restreint.

Le point de départ des remarquables travaux de M. Borel paraît avoir été la méthode de M. Cesaro basée sur les valeurs moyennes, et qui définit la valeur de $S[a_n]$, moyennant la limite, supposée finie de l'expression :

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + \dots + c_n s_n}{c_0 + c_1 + \dots + c_n}$$
$$s_r = a_0 + a_1 + \dots + a_r$$

$c_0, c_1, c_2 \dots$ nombres positifs convenablement choisis.

M. Borel a eu l'idée, vraiment féconde, de remplacer les c_r par des fonctions $c_r a^r$ de la variable continue a, la somme $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ par la fonction entière

$$\varphi(a) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots + c_n a^n + \dots,$$

la moyenne de M. Cesaro, par la limite :

$$s = \lim_{a=\infty} \frac{c_0 s_0 + c_1 a s_1 + \dots + c_n a^n s_n + \dots}{\varphi(a)}.$$

En prenant $\varphi(a) = e^a$ il obtient une méthode de sommation appelée *exponentielle.*

Il pose

$$u(a) = a_0 + a_1 a + \frac{a_2 a^2}{2!} + \frac{a_3 a^3}{3!} + \dots$$

et il transforme l'expression s dans la forme suivante :

$$s = \int_0^{\infty} e^{-a} u(a)\, da. \tag{1}$$

Si cette intégrale a un sens, et s'il en est de même que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}|u(a)|da$$

et aussi des intégrales

$$\int^\infty e^{-a}|u^{(\lambda)}(a)|da,$$

dans lesquelles λ désigne un indice de dérivation quelconque, il dit que série Σa_n est absolument sommable.

On peut alors prendre pour $\mathcal{S}[a_n]$ la valeur de s donnée par l'intégrale définie (1).

Il prouve en effet que sur les séries absolument sommables numériques sont possibles les opérations simples d'addition et de multiplication, et que si $a_n = u_n z^n$, c'est-à-dire si l'on a à faire avec une série

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots$$

ordonnée suivant les puissances d'une variable, on a les théorèmes suivants.

I. Si la série est absolument sommable pour une valeur déterminée de z, $z = z_0$, elle est absolument sommable sur le segment OM, si l'on désigne par O le point $z = 0$, et par M le point $z = z_0$.

II. La somme de cette série sur OM est une fonction analytique, qui n'a pas de point singulier dans le cercle décrit sur OM comme diamètre.

III. Si u, v, w, sont des séries absolument sommables pour $z = z_0$; si d'autre part

$$P(u, v, w, u', v', w' \ldots, u^{(\lambda)}, v^{(\lambda)}, w^{(\lambda)}, x)$$

est un polynome par rapport à u, v, w et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre λ, dont les coefficients sont des séries entières en x ayant un rayon de convergence supérieur à $|z_0|$; si dans ce polynome P, l'on remplace u, v, w par les séries correspondantes et l'on effectue les calculs comme si ces séries étaient convergentes, on obtient une série $\mathcal{S}$ qui est absolument sommable sur OM et qui définit par suite une fonction analytique F régulière à l'intérieur du cercle décrit sur OM comme diamètre.

Cette fonction analytique est précisément ce qui devient P lorsqu'on y remplace u, v, w, non plus par les séries mais par les fonctions analytiques correspondantes.

D'ailleurs la fonction F est identiquement nulle dans le cas et dans le cas seulement où la série $\mathcal{S}$ a tous ses coefficients nuls, c'est-à-dire dans le cas où les séries u, v, w vérifient formellement la relation

$$P(u, v, w, u' \ldots w^{(\lambda)}, a) = 0;$$

s'il en est ainsi les fonctions analytiques qui correspondent à u, v, w vérifient effectivement cette relation.

C'est bien là le point essentiel de la théorie de M. Borel qui en outre, dans le chapitre IV, détermine le polygone de sommabilité de ses séries, et donne des généralisations simples de la méthode exponentielle. Par ces méthodes on peut en particulier sommer en un point aussi voisin que l'on veut d'un point quelconque du plan une série de Taylor à rayon de convergence non nul et qui représente une fonction n'ayant qu'un nombre fini de points singuliers dans toute aire finie.

Ces méthodes fournissent donc un moyen d'étudier un développement de Taylor en dehors de son cercle de convergence. M. Borel cherche à les appliquer à la recherche des points singuliers.

Enfin il expose le théorème de M. Mittag-Leffler sur le développement d'une fonction analytique en série de polynomes et il montre comme les idées qu'il a exposées sur les séries divergentes permettent d'aboutir, dans cette voie, à des résultats bien plus étendus.

Ce beau livre est rédigé avec la clarté, l'ordre, le langage élégant qui sont propres aux travaux de M. Borel. Peut-être certains passages de l'Introduction peuvent paraître quelque peu trop indéterminés; par exemple l'énoncé du problème fondamental donné à la page 14. Il me faut encore mettre le lecteur en garde contre une interversion de limites qui se trouve à la page 31 et qui ne paraît pas être justifiée par les prémisses.

Ces remarques ne sauraient diminuer la valeur de ce livre, qui est le seul que l'on possède sur cet intéressant sujet et où l'auteur résume les résultats importants obtenus par lui dans cette vue.

Nous devons savoir bon gré à M. Borel de nous avoir ainsi donné le moyen de parvenir rapidement, et presque sans fatigue à la connaissance de tout ce qui a été fait d'important soit par lui soit par les autres dans cette nouvelle théorie.

Ettore Bortolotti (Modena).

G. Ferraris. — **Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik** (Les bases scientifiques de l'Electrotechnique). — Traduit de l'italien par Léon Finzi. — Un fort volume gr. 8° de 358 p. Prix : 12 marks ; B. G. Teubner, Leipzig, 1901.

Ce volume est le résumé des leçons faites au « Reale Museo Industriale Italiano » de Turin par son célèbre directeur. L'activité de Galileo Ferraris, enlevé prématurément à la science en 1897, s'est portée surtout sur l'application aux branches techniques des lois de l'électricité jusqu'alors réservées à la Physique pure. C'est en particulier à ses recherches qu'est due la première exposition complète des lois des actions réciproques des champs magnétiques produits par des courants alternatifs de phases différentes (Rotatione elettrodinamiche, 1888). Comme on le sait, ces lois et le moteur qu'il construisit, sont à la base des systèmes polyphasés dont le développement industriel a été aussi aussi heureux que rapide.

Le volume que nous avons sous les yeux se distingue par une langue alerte, familière presque dans sa simplicité ; les longues déductions mathématiques y sont rares, et il y est fait un usage suivi de la représentation vectorielle qui simplifie considérablement les explications et les calculs.

Après un premier chapitre d'introduction, consacré aux définitions et à la théorie des vecteurs, nous trouvons groupées cinq chapitres les matières annoncées par le titre : Electricité ; Magnétisme ; Electromagnétisme ; Courants variables et courants alternatifs ; Propagation des ondes électromagnétiques. Un complément d'une dizaine de pages contient quelques observations sur les unités magnétiques et électriques, ainsi que sur les divers systèmes de mesures (système pratique, système C. G. S. etc.).