propos de la formule de Taylor.

A propos de la formule de Taylor.

M. R. Suppautschitsch a bien voulu appeler mon attention sur trois « inconvénients » dans ma démonstration de la formule de Taylor publiée dans ce journal (II, p. 447). Je tiens, à ce propos, à lui répondre les lignes suivantes.

1° Quant à « l'adoption arbitraire » des fonctions

$$(\alpha)\ \sigma(x+\omega)-\sigma(x)-\omega\sigma'(x)-\Gamma\frac{\omega^2}{\varepsilon^2},\ [\Gamma\equiv\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)-\varepsilon\sigma'(x)]$$

$$(\beta)\ \sigma(x+\omega)-\sigma(x)-\omega\sigma'(x)-\ldots\ldots-\frac{\omega^r}{r!}\sigma^{(r)}(x)-\Gamma\frac{\omega^{r+1}}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\left(\Gamma\equiv\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)-\varepsilon\sigma'(x)-\ldots-\frac{\varepsilon^r}{r!}\sigma^{(r)}(x)\right)$$

je fais remarquer que dans *toutes* les démonstrations de la formule de Taylor, fondées sur le théorème de Rolle, on considère une fonction dans la formation de laquelle il y a toujours quelque chose d'arbitraire et dont l'adoption ne paraît pas, de prime abord, suffisamment justifiée ; c'est-à-dire que toutes ces démonstrations sont *synthétiques*. Au point de vue *didactique*, les démonstrations *synthétiques* sont sans doute inférieures aux démonstrations *analytiques* ou *génétiques*, mais, comme on sait, nous sommes très souvent obligés d'admettre des démonstrations synthétiques ; même la formule $f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$ se démontre synthétiquement.

Peut-être, serait-il préférable, pour la démonstration de la formule de Taylor, de considérer, de proche en proche, les déterminants :

$$\begin{vmatrix}\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x) & \varepsilon\\ \sigma(x+\omega)-\sigma(x) & \omega\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)-\varepsilon\sigma'(x) & \varepsilon^2\\ \sigma(x+\omega)-\sigma(x)-\omega\sigma'(x) & \omega^2\end{vmatrix},\ldots\ldots,$$

$$\begin{vmatrix}\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)-\varepsilon\sigma'(x)-\ldots-\frac{\varepsilon^r}{r!}\sigma^{(r)}(x) & \varepsilon^{r+1}\\ \sigma(x+\omega)-\sigma(x)-\omega\sigma'(x)-\ldots-\frac{\omega^r}{r!}\sigma^{(r)}(x) & \omega^{r+1}\end{vmatrix}$$

qui sont les fonctions mêmes (α) et (β) multipliées par des puissances de ε, et dont la construction est très facile à concevoir. Le premier de

---

une telle vivacité d'intelligence et de bonne humeur que j'ai tenu immédiatement à lui donner la petite satisfaction qu'il désire. J'ai trouvé du reste de la part de notre éditeur, M. Naud, la *complicité* la plus empressée.

Quant à la lettre de M. Morel, si nous l'insérons, ce n'est pas seulement à cause de son style alerte, de la bonne philosophie pratique qui s'en dégage. C'est surtout parce qu'elle montre de quelle ressource pour l'esprit, dans certaines circonstances de la vie, peut être la science que nous aimons et dont nous travaillons à propager la culture et le goût. C.-A. L.

ces déterminants sert à démontrer la formule $\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x) = \varepsilon\sigma'(x+\theta\varepsilon)$; le deuxième, la formule $\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\varepsilon\sigma'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\sigma''(x+\theta\varepsilon)$, etc.

2° Quant à l'invraisemblance de pouvoir trouver la formule (β), j'observe que, dans l'enseignement, on ne la trouve pas tout de suite, comme par un saut, mais on commence bien par la fonction (α), en poursuivant *de proche en proche*, jusqu'à ce que l'étudiant perçoive la loi de formation ; d'ailleurs, cette loi lui est déjà connue par l'Algèbre, par le développement de l'accroissement des polynômes entiers.

3° Quant à l'objection de M. Suppautschitsch que l'expression $\Gamma \equiv \sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)-\frac{\varepsilon}{1}\sigma'(x)-\ldots-\frac{\varepsilon^r}{r!}\sigma^{(r)}(x)$ ne reste pas constante dans la différentiation par rapport à ω, je crois qu'elle est sans fondement, car l'on voit sans peine que Γ est indépendant de ω.

La démonstration de M. Suppautschitsch est plus directe que la mienne ; mais il reste (du moins à moi) le scrupule de savoir comment, dans la différentiation par rapport à h, les $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ restent constants, puisque, en plus, la formule $f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta_1 h)$ montre que θ_1 dépend bien aussi de h. Du reste, θ_1 n'est pas, sans doute, nécessairement égal toujours à $\frac{1}{2}$ dans cette même formule ; et cependant M. Suppautschitsch trouve $\theta_1=\frac{1}{2}$.

J.-N. Hatzidakis (Athènes).

L'article de M. Suppautschitsch *sur la démonstration du théorème de Taylor* (*l'Ens. math.*, 3e année, n° 5) m'a intéressé parce que, autrefois, j'ai cherché en vain une démonstration dans cette voie-là. Mais M. S..., n'a pas réussi mieux que moi. En effet, il traite, en différentiant, comme constantes les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$, tandis qu'elles sont fonction de h.

Il me semble qu'on n'a pas le droit d'appliquer le nom de *théorème de Rolle* à l'équation $f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)$. Le théorème donné par Rolle ne concerne qu'un cas spécial, celui de $f(x+h)=f(x)$; voir par exemple, Cantor, *Vorls.*, t. III, p. 118 (de la 1re édition). Le théorème général a-t-il été énoncé avant Lagrange ?

H. Burkhardt (Zurich).

La notion de polynôme identiquement nul.

On lit dans la plupart des Traités d'Algèbre :

Lorsqu'un polynôme entier en x, *de degré* m, *s'annule pour plus de* m *valeurs distinctes de* x, *il est identiquement nul.*