CONSIDÉRATIONS SUR LA NATURE DE L'ESPACE

Autor(en): **Pietzker, Fr.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5578

CONSIDÉRATIONS
SUR LA NATURE DE L'ESPACE

I

LA QUESTION DE LA FORME DE L'ESPACE

On sait que parmi les propositions qui servent de base au système de Géométrie parvenu de l'antiquité jusqu'à nous se trouve celle-ci : Par un point il ne peut être tiré qu'une seule parallèle à une droite. Des essais tentés pour en prouver la nécessité intrinsèque ont surgi certaines difficultés; ceci, nous le savons, a eu pour conséquence d'amener à douter de cette nécessité, et à considérer une forme d'espace dans laquelle la proposition susdite n'est pas admise

C'est ainsi qu'il s'est formé une branche très étendue de recherches mathématiques, que l'on nomme le plus habituellement Géométrie non-euclidienne, parce qu'elle s'écarte de l'œuvre d'Euclide en rejetant la proposition ci-dessus [1]. On emploie également les noms de Pangéométrie, Géométrie absolue et Métagéométrie.

Les deux premiers indiquent que la nouvelle étude de l'espace renferme comme cas particulier la Géométrie euclidienne ; le troisième trouve son explication en ce que la forme de l'Espace non-euclidien sort de l'expérience à notre portée, en telle manière qu'il y a le même rapport entre cet espace et la Géométrie pra-

---

[1] On la désigne le plus souvent sous le nom de onzième axiome d'Euclide. Elle n'a été ajoutée au système que plus tard, pour remplacer le cinquième postulatum établi d'abord par Euclide, et d'après lequel deux droites coupées par une troisième doivent se rencontrer nécessairement lorsqu'il y a entre leurs angles une certaine relation. C'est effectivement là la forme employée ultérieurement pour la conception des parallèles d'Euclide.

tique que nous étudions, qu'entre la Métaphysique et la Physique (1).

Cette branche des recherches géométriques a continué à se développer dans une double direction. On s'est efforcé en premier lieu de construire, à l'exemple du système établi par Euclide d'après la proposition énoncée, un système également complet, indépendant de cette proposition, mais dans lequel toutes les autres hypothèses du système euclidien sont conservées.

Cette tâche a été plus particulièrement entreprise par les deux Hongrois, W. et J. Bolyai et par le Russe N.-I. Lobatschewsky, en suivant certaines conceptions que Gauss avait déjà formulées. Ils sont parvenus de la sorte à établir une géométrie qui non seulement renferme la Géométrie euclidienne comme cas particulier, mais qui se rapproche d'autant plus du système de cette Géométrie que le domaine dans lequel les figures de l'espace sont considérées a des dimensions plus restreintes. En conséquence on doit se poser cette question :

L'espace possède-t-il véritablement une forme différente de celle convenue dans le théorème des parallèles euclidiennes, sans que nous puissions avoir connaissance de cette déviation de la forme euclidienne, en raison du peu d'étendue du domaine ouvert à notre expérience ?

En même temps que l'on procédait à cette construction de la Géométrie non-euclidienne qui ne se sépare des hypothèses transmises que dans la question des parallèles, et conserve, par ailleurs, toutes les autres données fondamentales, on se prenait aussi à mettre en question la nécessité absolue de ces principes fondamentaux. Au premier abord, ce n'était que très naturel, en raison de toutes les tentatives faites pour prouver l'axiome des parallèles d'Euclide. Car, au fond, toutes ces tentatives consistaient à essayer de reconnaître dans cet axiome une conséquence nécessaire des autres. En essayant de ramener l'axiome des parallèles à ces hypothèses de la Géométrie euclidienne, on se trouvait naturellement conduit à se demander si ces hypothèses étaient bien, comme on le croyait, des conceptions nécessaires.

(1) Quoique le nom de Métaphysique n'eût autrefois qu'une signification purement externe, rien n'est changé à la signification interne qu'on lui donne communément aujourd'hui.

Cette recherche a toujours continué à prendre de l'extension; on trouve un exposé résumé de son état actuel dans le mémoire publié par M. D. HILBERT, à l'occasion de l'inauguration du monument de Gauss-Weber à Gœttingue; dans cet écrit qui a pour titre : *Grundlagen der Geometrie* (1) (Fondements de la Géométrie), les axiomes sont divisés en cinq groupes, et dans chaque groupe il discute les conclusions de l'abandon de tel ou tel axiome.

Cette extension, que je voudrais signaler comme développement philosophique faisant contraste avec les opérations constructives de la Géométrie non-euclidienne, a été favorisée par une série de circonstances qui l'ont maintenue en même temps dans une certaine voie.

BELTRAMI remarqua que les relations qui existent dans le système de Bolyai et de Lobatschewsky montrent une grande analogie avec celles qui existent sur les surfaces à courbure constante et négative. Ceci conduisit à établir un système comparable à ce qui se passe sur les surfaces à courbure constante et positive, et, par ainsi, à enrichir la Géométrie d'une forme nouvelle d'espace, dans laquelle on abandonnait en même temps deux suppositions jugées jusque-là indispensables : l'impossibilité pour deux droites de se couper en plus d'un point, et l'étendue infinie de l'espace.

La mesure toujours croissante dans laquelle la validité des aperçus géométriques arrivés jusqu'à nous a été soumise à un examen critique, a eu pour résultat de résumer toute la discussion dans la question importante de savoir quelles sont, dans notre science géométrique, la part de l'expérience d'un côté, celle de la nécessité logique de l'autre; et cette appréciation, que cela seul est logiquement nécessaire qui peut s'exprimer par une formule mathématique, a gagné de plus en plus en autorité. Quant à la direction dans laquelle toute la recherche a continué à se développer, elle s'est précisée dans cette idée qui ne veut apercevoir derrière le changement des figures géométriques que la personnification visible de la transformation algébrique.

---

(1) B. G. TEUBNER, Leipzig, 1899. — Traduit en français par M. LAUGEL; *Ann. de l'École Normale*, t. XVII, 1900. (LA RÉDACTION.)

Arrivées à ce point, les études ne se sont pas bornées à l'espace à trois dimensions. Partant de ceci, que dans l'Algèbre le nombre des variétés d'expressions est illimité, on est parvenu à ne considérer l'espace triplement étendu que comme cas particulier d'un espace général ayant un nombre arbitraire de dimensions; en ceci, comme presque partout ailleurs, on a suivi des voies parcourues d'abord, ou du moins indiquées par Gauss.

Ainsi, dans nos recherches mathématiques, les choses en sont là : à côté de l'espace conforme aux suppositions de la Géométrie euclidienne, et que l'expérience nous rend familier, on prend encore en considération les différentes autres formes possibles de l'espace. Tout en conservant la plus grande partie des hypothèses euclidiennes, il reste toujours encore deux catégories de formes d'espace qui, par la généralisation d'un aperçu propre à l'étude des surfaces, sont considérées comme espaces de courbure positive et négative; entre ces deux formes, l'espace euclidien, dont le signe caractéristique est la courbure de valeur zéro, prépare la transition.

II

LES PREUVES DE POSSIBILITÉ D'UNE FORME NON-EUCLIDIENNE DE L'ESPACE

Tout en m'apprêtant à soumettre à un examen critique les fondements de l'espace considéré à la façon moderne, je voudrais d'abord mettre en pleine lumière les points de vue auxquels je me place dans cet examen. Je ne méconnais en aucune manière les progrès que la recherche mathématique a faits, en ce sens que chaque conclusion de la théorie a précisé la part revenant aux différentes hypothèses du système géométrique considéré. Le bénéfice que la recherche géométrique a, sans sortir du système euclidien, retiré de son travail, nous est montré clairement par un coup d'œil jeté sur la Géométrie projective; tout en comblant les lacunes laissées par M. Von Staudt, les recherches de la Géométrie non-euclidienne ont fourni l'occasion de développer utilement cette branche. Je paie un tribut d'admiration à la sagacité grâce à laquelle, moyennant l'abandon de quelques hypothèses du système euclidien, on a établi et fouillé jusque dans le détail de nouvelles formes de l'espace conçues sur une base plus large.

Mais je voudrais aussi établir en même temps ce fait : la question de savoir si l'une de ces hypothèses n'est pas ou n'est qu'incomplètement compatible à une forme d'espace capable d'une existence réelle ne se décidera, ni par la discussion purement théorique des conclusions provenant du doute émis sur la conception euclidienne, ni par l'étude détaillée des systèmes qui ont été établis en conservant une partie des axiomes d'Euclide.

Voici donc la question : Quelles conditions doit remplir une forme d'espace pour qu'on puisse lui attribuer une réelle existence ? C'est à cette question seule, comme je le remarque ici expressément, que s'adresseront toutes mes discussions suivantes.

Que des domaines entiers de la Géométrie, comme par exemple la Géométrie projective, aient pu être créés d'une façon entièrement indépendante de la conception des parallèles euclidiennes, ceci naturellement ne prouve rien. Cette indépendance à l'égard de l'axiome des parallèles et des propositions connexes, comme celle de la somme des angles d'un triangle, n'est pas une nouveauté; l'étude de la congruence des triangles en offre aussi un exemple depuis longtemps connu, mais cet exemple n'a jamais ébranlé la croyance à la nécessité intrinsèque de la théorie des parallèles euclidiennes, croyance qui s'est conservée pendant des siècles jusqu'à nos jours.

En admettant même que l'on ne soit pas parvenu jusqu'à présent à donner du Postulatum d'Euclide une démonstration généralement reconnue et à l'abri de toute attaque, ceci n'est pas un signe certain qu'une telle preuve soit absolument impossible, et qu'il y ait lieu de concevoir un autre état de choses. L'Histoire offre trop d'exemples de recherches qui pendant longtemps ont manqué leur but parce que de prime abord elles ont été engagées sous une forme erronée ou dans une fausse direction. Mais je trouve beaucoup plus extraordinaire que, malgré le manque d'une base hors d'atteinte, la croyance à la justesse du système euclidien n'ait eu aucune secousse pendant plus de deux mille ans. Saccheri même, aux recherches récemment connues duquel les partisans de la théorie moderne de l'Espace ont eu recours, a repoussé absolument tout doute sur la réelle existence de la forme euclidienne.

L'existence du système admirablement établi par Bolyai et Lobatschewsky ne possède pas non plus de preuve décisive. Si des contradictions internes n'ont pas jusqu'à ce jour été relevées dans ce système, on ne peut pas en conclure avec certitude que de telles contradictions n'existent pas. Ici encore il se peut que la recherche de ces oppositions, grâce à la direction peu convenable qu'elle aurait prise dès l'origine, ait simplement passé à côté des points essentiels : C'est la meilleure garantie contre ces contradictions, c'est-à-dire l'évidence pratique qui manque au système non-euclidien de Géométrie.

Pour cette raison, la recherche géométrique moderne a jugé nécessaire de ne pas se contenter de cette base négative pour justifier la théorie de l'espace non-euclidien; elle croit pouvoir affirmer la possibilité de l'existence des formes nouvelles d'espace par des raisons positives directes. L'une de ces preuves est dans la signification géométrique que l'on accorde aux transformations algébriques. Je ferai expressément remarquer que la transformation algébrique ne possède par elle-même aucune force probante ; aucun calcul du monde ne peut donner à lui seul d'éclaircissement sur l'existence des relations de l'espace. En tous les cas, on peut bien considérer les expressions algébriques selon le sens attaché à chaque variété d'expressions comme signe de différentes figures géométriques : point, ligne, surface, etc. ; mais quant à ce qui concerne la forme de ces figures, leurs relations mutuelles, et leurs positions relatives, surtout leurs rapports angulaires, aucune considération purement algébrique ou analytique ne peut jamais donner le moindre éclaircissement. Tous ces faits ne doivent provenir que d'une source extérieure, et le raisonnement algébrique ne peut recevoir une certaine interprétation géométrique qu'en employant une série de moyens qu'il n'offre pas par lui-même. Il est clair que pour cette interprétation le critérium qui s'attache à la preuve algébrique ne peut plus être invoqué.

Et maintenant, prenons l'interprétation courante; les exemples ci-après mettront en évidence sa forme arbitraire.

Le premier de ces exemples concerne une forme d'espace qui ne se contente pas de rejeter l'axiome des parallèles d'Euclide, mais qui introduit des relations toutes nouvelles. On y considère les points d'une droite comme des figures de l'espace, comme les éléments d'un groupe de grandeurs se ramenant à eux-mêmes par la transformation $z' = \lambda z$ (1). En conséquence on a l'expression $\frac{1}{\log \lambda} \log \frac{z}{z'}$ pour la distance de deux points. L'arbitraire de cette conception est palpable.

Comme deuxième exemple, je cite le calcul des distances, que Hilbert donne dans son écrit déjà cité (2); celui-ci a pour base la représentation conforme de l'unité au moyen de deux segments (*Strecken*) OE et OE', choisis sans qu'on se préoccupe de savoir s'ils possèdent ou non, dans le sens ordinaire du mot, une égale longueur. Ici encore il est à peine utile d'insister sur ce que l'hypothèse a d'arbitraire.

Si ces deux exemples ont un intérêt seulement théorique, en ce que les auteurs des conceptions que nous venons de citer ont uniquement pour but de montrer les modifications qu'exige notre pensée, par l'abandon de certaines hypothèses, dans la représentation de l'espace telle qu'elle nous est parvenue, l'appel à la transformation algébrique par laquelle on doit justifier l'existence du système de Bolyai et de Lobatchewsky a un intérêt pratique d'autant plus grand. Car c'est sur ce système que se concentre particulièrement l'attention quand il s'agit de la réalisation pratique de la Géométrie non-euclidienne dans le sens étroit du mot.

Je puis également mentionner ici l'ouvrage précédemment cité de Hilbert où il est dit (3) : « Qu'on se figure les points, droites et plans de la Géométrie ordinaire, en tant qu'ils sont à l'intérieur d'une sphère solide, comme éléments constitutifs d'une Géométrie de l'espace, et qu'on établisse les congruences de cette Géométrie au moyen des transformations linéaires de la Géométrie usuelle capables de ramener la sphère solide à elle-même : on reconnaît

(1) F. Klein, *Math. Annalen*, IV, p. 585; voir Pietzker, *Ztschr. f. math. und natur. Unt.*, XXIII, p. 81-106.

(2) D. Hilbert. *Fondements de la Géométrie*, § 24-30.

(3) Hilbert. *Fondements de la Géométrie*, § 10, fin.

par des définitions appropriées que dans cette Géométrie « non-euclidienne » plusieurs axiomes euclidiens, sauf l'axiome des parallèles, sont valables; et comme la possibilité de la Géométrie ordinaire est établie, celle de la Géométrie non-euclidienne s'ensuit. »

Les termes de cette citation : « On doit établir les congruences au moyen des transformations », montrent clairement sa grande faiblesse; on reconnaît déjà par là qu'en fin de compte toute la discussion ne porte que sur une conception impropre à laquelle manque la précision nécessaire.

Ceci devient encore plus lucide si l'on examine en détail l'état de la question, comme cela a été fait d'abord par Cayley (1). Bien entendu, les équations qui résultent de là entre les côtés et les angles d'un triangle reposent sur l'emploi des fonctions hyperboliques, comme dans la Géométrie lobatschewskienne, mais les longueurs de côtés et les grandeurs d'angles liées ensemble par de telles équations ne représentent plus les grandeurs des côtés et angles tels qu'ils se trouvent réellement dans ce triangle; ce sont de nouvelles grandeurs qui ont un certain rapport avec ces grandeurs proprement dites, et leur sont substituées; et cette substitution n'est légitime que si, en accomplissant dans les grandeurs substituées certaines opérations, les valeurs nouvelles qu'on leur fait prendre ont entre elles un rapport égal à celui qu'avaient auparavant les grandeurs proprement dites.

Il existe donc une certaine correspondance entre les grandeurs proprement dites et celles qu'on met à leur place. Il va sans dire que cette correspondance ne donne pas le droit d'identifier la première classe de grandeurs avec la seconde; mais ceci devient encore plus clair lorsque l'on représente cette transformation par une projection. Il se trouve, par exemple, qu'à chaque angle d'un triangle vient s'adjoindre un deuxième angle et que la somme des angles adjoints qui correspondent aux angles du triangle garde en effet une valeur inférieure à deux droits, ce qui est conforme aux enseignements de la Géométrie lobatschewskienne. Mais ces angles ne sont plus du tout ceux de la figure dont il s'agit; ce ne sont pas davantage les angles d'un autre

(1) Cayley, On the non euclidean Geometry, *Math. Ann.*, V, p. 630.

triangle plan, ce sont plutôt des angles n'appartenant pas même à une figure rectiligne.

Affirmer par de telles transformations la possibilité de l'existence de figures planes avec une forme d'angle compatible au système de Lobatschewsky c'est émettre une assertion en l'air; cette assertion ne serait prouvée que si l'on identifiait deux grandeurs distinctes; elle repose donc sur un développement de la notion logique d'égalité, contre lequel toutes les objections élevées jusqu'à présent au sujet de l'axiome des parallèles paraissent peu de chose.

On a également voulu, pour prouver l'existence de la Géométrie lobatschewskienne, faire appel à l'analogie que Beltrami, déjà cité, a reconnue entre cette Géométrie et les relations présentées par les surfaces de courbure constante et négative. En effet, cette analogie est parfaite si l'on attribue aux plus courts chemins tracés sur ces surfaces le rôle qui incombe aux droites sur le plan euclidien. Mais si l'on en tire cette conclusion que, les relations intérieures étant les mêmes dans les deux cas, et qu'en outre sur les surfaces données la Géométrie euclidienne étant valable jusqu'à la proposition des parallèles, l'existence d'une Géométrie indépendante de cette proposition serait prouvée, eh bien ! il faut absolument contester cette conclusion. Car il n'est pas exact que la Géométrie à deux dimensions sur les surfaces de courbure constante négative soit entièrement conforme à toutes les suppositions de la Géométrie euclidienne déduction faite de l'axiome des parallèles.

Ceci est tout particulièrement vrai au sujet de la droite dont on n'a pas épuisé la notion en disant qu'elle représente la plus courte distance de deux points. Souvent aussi, dans la Géométrie de Bolyai comme dans l'euclidienne, la qualité fondamentale de la droite employée de préférence est, comme nous l'expliquons plus loin, celle d'être une ligne entièrement déterminée par deux points, et d'après cela parfaitement retournable; cette qualité ne prend naturellement toute sa valeur que si l'on envisage aussi les trois dimensions de l'espace, de sorte que l'on comprend que l'on n'y avait pas égard, quand on marquait l'analogie entre le plan euclidien et la surface de Beltrami.

III

ÉTABLISSEMENT DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PAR LE PRINCIPE DE LA DÉTERMINATION RÉCIPROQUE AU MOYEN DE COORDONNÉES

On peut en tous les cas établir que si des lacunes ont été reprochées jusqu'à présent aux essais des partisans de la forme euclidienne de l'espace, il n'y a pas moins de grandes faiblesses dans les arguments par lesquels on a voulu mettre hors de doute l'impossibilité d'asseoir sûrement la Géométrie euclidienne.

Conclusion : la question est toujours pendante, et l'on ne peut *a priori* renoncer à prouver, par un nouvel essai, la possibilité unique de la forme euclidienne. Un tel essai, pour avoir des chances de réussite, doit satisfaire à une série d'exigences qui surgissent du développement acquis par la discussion sur la question de la possibilité de l'Espace. Il devra éviter les fautes qui ont été avec raison reprochées jusqu'ici aux essais de preuve entrepris dans l'un et l'autre sens, renoncer à l'emploi de certaines idées impropres que la discussion sur la Géométrie non-euclidienne avait été amenée à utiliser ; il ne sera pas moins obligé d'écarter des notions tout à fait incapables de précision absolue, comme par exemple celle de direction, admise par quelques preuves de la conception euclidienne.

Cet essai de preuve doit ensuite satisfaire à la condition que le domaine de l'espace considéré par lui possède une étendue finie, ceci afin de prévenir dès le début toutes les objections qui ont été élevées, par exemple, contre la preuve de Bertrand.

En même temps, la critique des raisonnements établis en faveur de la Géométrie euclidienne indique de façon claire et positive la direction dans laquelle la recherche devra se tenir si elle veut arriver à son but. Elle devra considérer avant tout, comme des facteurs de la plus grande importance, le développement multiple de l'espace et l'inversion complète de la droite, inversion qui n'a de sens que dans cet espace multiplement étendu et partout homogène.

On peut satisfaire aux prescriptions négatives et positives qui viennent d'être citées par une démonstration basée sur la représentation de l'espace de Lobatschewsky. Mais, parmi les innombrables possibilités que cette représentation de l'espace renferme en soi se trouve aussi la forme euclidienne, et nous allons démontrer que les hypothèses fondamentales transportées du système euclidien dans le système de Bolyai-Lobatschewsky ne peuvent trouver leur complète réalisation que dans le cas unique de cette forme.

Pour comprendre cette démonstration [1], établissons d'abord quelques propositions, utiles à considérer, qui tantôt s'appliquent généralement à la Géométrie de Bolyai, et par conséquent sont valables pour la Géométrie non-euclidienne comme pour l'euclidienne, tantôt ont une forme différente selon que l'on admet ou que l'on rejette la forme euclidienne de l'espace.

A côté des conditions de congruence des triangles, sont également vraies dans les deux formes de l'espace les propositions suivantes :

1° Dans chaque triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, donc en particulier dans le triangle rectangle l'hypoténuse est le plus grand côté. 2° Une droite perpendiculaire sur deux autres droites sécantes est perpendiculaire sur le plan qu'elles déterminent. 3° Si une droite sécante à un plan est perpendiculaire sur une droite de ce plan, sa projection orthogonale sur le plan est aussi perpendiculaire sur la seconde droite. 4° Deux droites tombant dans deux plans et perpendiculaires à la ligne d'intersection de ces plans au même point forment quel que soit ce point des angles de même grandeur.

La somme des angles des figures planes n'a une valeur déterminée qu'en Géométrie euclidienne, où la somme des angles du triangle vaut deux droits, et celle du quadrilatère quatre droits. Dans tout autre cas que celui de cette Géométrie, la somme des angles du triangle reste inférieure à deux droits, et celle du quadrilatère inférieure à quatre droits. D'après cela, l'existence d'un quadrilatère avec quatre angles droits séparés n'est possible que dans l'espace euclidien.

---

(1) On trouve un développement plus ample de cette idée dans le mémoire de l'auteur : *Die Gestaltung des Raumes.* (La forme de l'espace), Brunswick, O. Salle, 1891, chap. II, p. 18-29.

Commençons maintenant la démonstration proprement dite, en jetant un coup d'œil sur cette propriété dont jouit l'espace euclidien : Une détermination entreprise dans cet espace au moyen de coordonnées cartésiennes est entièrement réversible. En effet, quand on a $OA = x$, $OB = y$ représentant les coordonnées planes et rectangulaires d'un point I; on a en même temps de l'autre côté, $IB = x$, $IA = y$; ces deux segments (*strecken*) sont perpendiculaires l'un sur l'autre au point I et peuvent déterminer le point O en partant de I. Cette seconde détermination n'est que le pendant réciproque de celle par laquelle le point I a été obtenu en partant de O. Cette réciprocité existe aussi quand on passe du plan à l'espace. Pour déterminer le point Q, ajoutons aux coordonnées précédentes la troisième coordonnée $OC = z$. En nommant K le quatrième sommet du rectangle formé par OA et OC, L celui du rectangle formé par OB et OC, on voit qu'alors A, B et C sont les quatrièmes sommets de trois rectangles qui possèdent le sommet commun Q, et sont congruents respectivement des rectangles contigus en O précédemment cités. La détermination du point O depuis Q est donc aussi dans ce cas le pendant réciproque de la détermination du point Q depuis O.

Aussitôt qu'on renonce aux suppositions de la géométrie euclidienne, la détermination qui vient d'être décrite perd le caractère de la réciprocité. En effet, en abaissant des points I du plan xoy des perpendiculaires sur les axes de coordonnées passant par O, dans tout autre cas que celui de la géométrie euclidienne, non seulement ces perpendiculaires diffèrent dans leur longueur des segments (*Strecken*) OA et OB, mais encore, à considérer leur inclinaison, on voit qu'elles ne forment ensemble ni un angle droit, ni même un angle de grandeur invariable pour tous les points I.

On ne parvient pas davantage à la réciprocité absente si l'on fait concourir à la détermination du point I au moyen des coordonnées $OA = x$, $OB = y$ les lignes particulières que l'on nomme en géométrie lobatschewskienne équidistantes d'une droite. En menant par le point A la ligne de distance x à l'axe OY, et par le point B la ligne de distance y à l'axe OX, on trouve toujours naturellement de cette manière un point I bien déterminé, mais les axes de détermination qui se coupent en ce point ne possèdent même plus le caractère de lignes droites; en tous cas ces axes ne sont pas égaux aux premiers axes de coordonnées.

La forme parfaitement régulière de l'espace qui est supposée dans la géométrie de Lobatschewsky exige aussi pour l'espace obéissant aux lois de cette géométrie la possibilité d'une *détermination réciproque au moyen de coordonnées.* Car il va de soi, par la nature même de cette détermination, qu'en établissant la position du point Q d'après le point de départ O, se détermine aussi d'elle-même la position du point O vis-à-vis du point Q; l'égalité de structure de l'espace, telle qu'il n'y a aucune différence de position entre les points O et Q, demande impérieusement que cette réciprocité de position s'exprime par la réciprocité de la détermination au moyen de coordonnées. En effet, on peut satisfaire à cette exigence, quand on reste dans le plan.

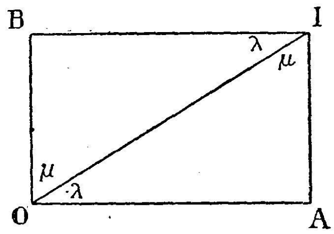

Fig. 1.

La manière dont ceci est possible est indiquée par la figure ci-dessus, dans laquelle sont tirés à partir de O deux axes perpendiculaires qui forment avec la ligne OI les angles λ et μ. Si l'on fait ensuite sur OI au point I des angles égaux respectivement aux précédents et occupant par rapport à eux des positions alternes, on forme le quadrangle OAIB qui possède des angles droits en O et I, tandis que les angles A et B ne sont droits que dans le cas de la géométrie euclidienne, et dans les autres cas sont aigus. Je désignerai par le nom de *rectangloïde* une figure de l'espèce du quadrangle OAIB et j'appellerai *diagonale principale* la ligne qui joint les sommets des deux angles droits, et l'autre diagonale, *diagonale secondaire.* Comme il est facile de le voir, les triangles OIA et OIB sont congruents, donc IB $=$ OA, et IA $=$ OB ; il en résulte alors que la diagonale secondaire doit partager le quadrangle en deux triangles congruents, et qu'ensuite les diagonales se coupent en leur milieu.

De cet état de choses on déduit pour déterminer le point I à partir de O le procédé suivant :

Qu'on trace à partir de O deux droites perpendiculaires sur lesquelles on prend les segments OA $= x$, OB $= y$, qu'on tire ensuite la droite AB et qu'on joigne son milieu à O, on obtient le point I en prolongeant d'une longueur égale à elle-même au delà du milieu cette ligne de jonction. La construction est évidemment tout à fait retournable.

On voit que, pour l'établissement d'un système réciproque de coordonnées dans le plan doublement étendu, il n'est pas nécessaire de supposer l'axiome euclidien de parallèles; en abandonnant cet axiome, il est parfaitement possible d'établir un tel système.

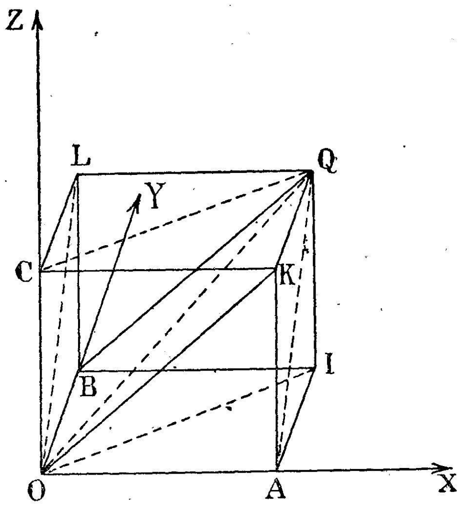

Fig. 2.

Examinons maintenant la situation que nous rencontrons, en employant ce mode de détermination pour l'espace à trois dimensions.

A cette fin, nous choisissons d'abord un point quelconque de cet espace comme origine de détermination; par ce point, nommé O, nous traçons trois droites perpendiculaires chacune aux deux autres, et sur ces droites, nous mesurons les segments $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, la question se pose alors de savoir où est situé le point de l'espace déterminé par ces trois coordonnées.

Dès l'abord, il est clair que ce point sera le point d'intersection de trois plans passant, l'un par le point A, le second par le point B, le troisième par le point C; mais ces déterminations ne suffiraient pas pour déterminer assez la position de ces plans. Donc, il est nécessaire de chercher une règle complémentaire et aboutissant à une construction réciproque.

Dans la géométrie euclidienne la règle est la suivante : on y construit les plans en question comme perpendiculaires aux axes Ox, Oy, Oz. Mais dans notre cas, cette construction n'est pas admissible dès l'abord, puisque nous ne supposons d'avance que les hypothèses et les théorèmes que connaît aussi la théorie lobatschewskienne.

Malgré cela, il est possible de parvenir à une règle suffisante en considérant la figure 2, qui nous montre les trois coordonnées en question.

Nous voyons en cette figure, les points I, K, L, qu'on obtient en construisant les rectangloïdes OAIB, OAKC, OBLC. Le point I a les coordonnées $x = OA$, $y = OB$, $z = O$; de même les coordonnées de K sont $x = OA$, $y = O$, $z = OC$; celles du point L sont $x = O$, $y = OB$, $z = OC$.

Après cela, cherchons la position du point dont les coordonnées sont $x = OA$, $y = OB$, $z = OC$. Comme la règle que nous cherchons doit embrasser aussi le cas où l'une ou l'autre des trois coordonnées est égale à zéro, il faut que les plans passant par les points A et B renferment encore le point I qui a les coordonnées $x = OA$, $y = OB$, $z = O$.

Pour la même raison, il faut demander que le plan passant par le point A renferme aussi le point K, que le plan passant par B renferme également le point L, et enfin que le plan passant par C passe par les deux points K et L. Nous arrivons ainsi à la règle cherchée qui nous donne une détermination complètement suffisante pour la détermination des trois plans en question; c'est la suivante :

Pour trouver le point dont les coordonnées sont $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, on construira les rectangloïdes OAIB, OAKC, OBLC, puis on construira les trois plans IAK, IBL, KCL, le point d'intersection de ces trois plans est le point cherché.

Cette construction résultant nécessairement de la construction énoncée plus haut pour la surface doublement étendue, et, comme celle-ci, ne supposant que les hypothèses de la théorie lobatschewskienne, ne remplirait pas encore, sous la forme où nous venons de l'obtenir, la condition d'être réciproque; il faut la compléter pour ce but. Comme nous nous en souvenons, le principe des coordonnées réciproques a exigé que la construction par laquelle le point Q était déterminé vis-à-vis du point O, nous donnât une détermination tout équivalente du point O en partant du point Q.

Le point O est le sommet commun des trois quadrilatères OAIB, OAKC, OBLC, qui sont tous rectangloïdes ; au point Q se rencontrent les quadrilatères QKLC, QIBL, QIAK; pour que la construction soit réciproque, il faut que ces trois quadrilatères, dont la forme était jusque-là indéterminée, soient congruents aux rectangloïdes OAIB, OAKC, OBLC, de manière que les points C, A, B, répondent aux points I, K, L.

Par exemple, l'angle KCL sera alors égal à l'angle AIB, mais comme celui-ci est égal à l'angle AOB, que nous avons supposé dès l'abord comme droit, l'angle KCL aura également la grandeur d'un droit. Parmi les angles dont les côtés partent des points O et C, il y en aura donc quatre qui, en tous cas, se présentent comme angles droits; outre les angles mentionnés tout à l'heure AOB et KCL, ce seront les angles AOC et BOC ; quant aux angles OCK et OCL, ils ne seront droits qu'au cas de la géométrie euclidienne; en tout autre cas ces angles seront aigus.

Il se trouvera alors toujours dans le voisinage du point C une infinité de points jouissant de cette propriété, que le plan passant par un d'entre eux et perpendiculaire à l'axe OZ coupe CK aussi bien que CL.

Admettons qu'un tel point soit le point H de la figure 3; le plan perpendiculaire à OO coupe les lignes CK et CL aux points K_1 et L_1. Alors l'angle K_1 H L_1, qui mesure, comme l'angle AOB, l'inclinaison des plans AOC et BOC, d'après la proposition énoncée plus haut sous le n° 4, proposition admissible pour la géométrie non-euclidienne aussi bien que pour la géométrie euclidienne, est égal à l'angle AOB, et vaut un droit. Mais comme l'angle K_1 CL_1 serait aussi droit, l'on aurait sur l'hypoténuse K_1 L_1 deux triangles rectangles dont les hauteurs devraient avoir le même pied G, en vertu de la proposition citée plus haut sous le n° 3, commune aux géométries euclidienne et non-euclidienne.

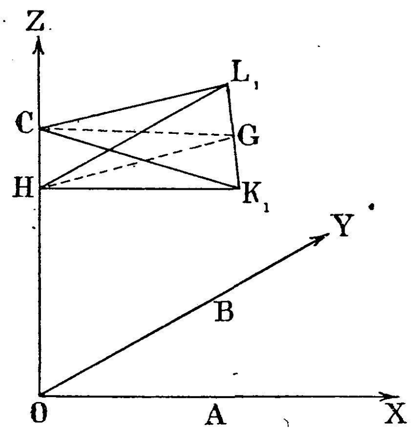

Fig. 3.

Or, le triangle CHG est rectangle, et dans ce triangle CG est plus longue que HG. Rabattons alors le triangle K_1 CL_1 sur le plan K_1 HL_1; la figure 4 montre clairement que l'angle K_1 HL_1 doit toujours être plus grand que K_1 C_1 L_1 et que par conséquent ces deux angles ne peuvent pas être en même temps droits. En acceptant une forme non-euclidienne d'espace on arrive ici à une objection qui ne peut être levée autrement que si l'on suppose droits les angles OCK et OCL, c'est-à-dire que si l'on considère les rectangloïdes comme des rectangles parfaits tels qu'ils se présentent dans la seule géométrie euclidienne; on aurait prouvé par là la possibilité unique de cette géométrie.

On parvient au même but si l'on emploie les trois coordonnées données non en même temps, mais successivement. Déterminons dans le plan xy, au moyen des coordonnées $OA = x$, $OB = y$, le point I comme extrémité de la diagonale principale du rectangloïde OAIB, et combinons ensuite cette diagonale principale OI avec la troisième coordonnée $OC = z$ perpendiculaire au plan xy de façon à former un rectangloïde OIQC. Il est indispensable que la position du point Q soit indépendante

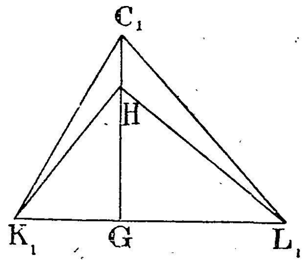

Fig. 4.

de l'ordre dans lequel on a employé les trois coordonnées; et pour cela il faut par conséquent parvenir au même point Q, si l'on se sert, par exemple, au lieu du rectangloïde OAIB formé par x et y, de celui OAKC formé par x et z, et dont la diagonale principale se combinerait alors avec $OB = y$. Ici également l'on démontre que l'angle KCL doit nécessairement être égal à un droit, et la conclusion à en tirer est d'accord avec celle qui vient d'être présentée ci-dessus [1].

IV

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Dans le chapitre précédent, j'ai démontré d'une façon évidente l'impossibilité de chaque forme d'espace contraire aux suppositions d'Euclide. Cette démonstration, qui ne considère que des grandeurs finies, se base uniquement sur les hypothèses que le système de Bolyai et Lobatschewsky a empruntées au système de géométrie euclidienne. En partant de ceci : qu'entre tous les couples de points de l'espace il existe toujours une détermination par coordonnées réciproques, je n'ai fait que tirer les conséquences de trois hypothèses, à savoir : 1° que la structure de l'espace est partout la même; 2° que cet espace renferme cer-

(1) Voir le développement de cette démonstration dans le travail cité : *Die Gestaltung des Raumes*, p. 26-27.

taines lignes parfaitement déterminées par deux points et, par conséquent, complètement retournables; 3° que tout point peut être déterminé en mesurant certains segments sur plusieurs lignes de cette espèce. Ces trois hypothèses ne conviennent pas moins à la géométrie de Lobatschewsky qu'à celle d'Euclide.

On pourrait donc croire la question tranchée s'il était permis de regarder ces hypothèses comme incontestables. Or, par un coup d'œil jeté sur le développement de la géométrie non-euclidienne, l'on reconnaît déjà que ce n'est pas permis. Et même, il est inutile d'invoquer ce développement, car, dans la géométrie euclidienne, l'établissement d'une définition de la ligne droite partout acceptée a suscité déjà beaucoup de difficultés. A la définition de la ligne droite comme ligne parfaitement déterminée par deux points, on a eu raison d'objecter que cette définition est purement négative, aussi l'a-t-on souvent remplacée par celle qui considère la droite comme le plus court chemin entre deux points (1).

Je crois, en vérité, que cette seconde définition est encore plus contestable que la première, laquelle renferme, au fond, tous les attributs que l'esprit accorde d'une façon innée à la droite. Toutefois, les objections faites à la définition primitive exigent impérieusement qu'elle soit corrigée par des attributs positifs, et ceci ne pourra se faire que par une analyse de la nature même de l'espace.

Cette analyse diffère beaucoup de l'argumentation usitée; dans celle-ci, au lieu d'étudier l'espace même, on part d'une série

---

(1) HELMHOLTZ, par exemple, est de cet avis, car il dit ceci dans un passage de son mémoire *Sur l'origine et la signification des axiomes géométriques :* « Nous déterminons des droites par la trajectoire des rayons lumineux, trajectoire que l'expérience nous donne comme rectiligne; mais il se pourrait que dans un espace ayant une autre courbure, la lumière se répandant dans un milieu réfringent partout homogène suivît également le plus court chemin ».

En réalité, les faits sont contraires à l'idée de HELMHOLTZ. Nous ne pouvons pas le moins du monde expérimenter la direction rectiligne des rayons lumineux qui ne sont pas saisissables, nous jugeons plutôt cette direction en examinant si les points qu'elle renferme paraissent se superposer à nos yeux; nous admettons *a priori* que le chemin du rayon lumineux est droit, mais cette supposition n'est point le résultat d'une expérience, elle précède au contraire toute expérience qui sans cela serait impossible. Son origine réside dans la propriété de la droite d'être déterminée par deux de ses points. Nous croyons rectiligne le rayon lumineux allant du point A vers le point B parce que la ligne droite AB est la seule ligne assez bien déterminée par les deux points.

d'axiomes, et l'on juge une partie d'entre eux admissibles d'après le degré où ils se laissent démontrer comme conséquence de l'autre partie. Les axiomes isolés ne constituent pas la notion de l'espace, notion dont chaque axiome ne représente qu'un côté; et, en s'abîmant dans la considération des axiomes isolés, on risque de perdre de vue l'idée même de cet espace.

C'est à cette idée que je veux maintenant revenir, et j'examinerai dès l'abord jusqu'à quel point l'on peut regarder comme conceptions nécessaires les bases de la démonstration donnée au chapitre précédent.

En analysant l'idée de l'espace d'après le sens dans lequel elle a été partout et pendant tous les siècles interprétée sans contradiction, je définis l'espace comme une variété intuitive, partout homogène, à dimensions multiples, c'est-à-dire comme l'ensemble d'éléments dont chacun est déterminé par un certain nombre de grandeurs variables indépendantes les unes des autres, nombre à examiner plus tard.

Nulle part, je crois, on ne saurait contredire cette analyse de la notion d'espace, mais la grande autorité d'HELMHOLTZ me force à dire quelques mots sur l'hypothèse d'un espace qui n'aurait pas partout même structure. Helmholtz dit que deux figures qui, juxtaposées, se manifestent comme égales, peuvent éprouver en se déplaçant des déformations ou changements. En discutant ce cas, il ne remarque pas qu'il faut avoir la notion d'égalité avant que l'on puisse concevoir celle de changement, et qu'une égalité dans l'espace ne peut se constater qu'en considérant à la fois divers lieux de cet espace; une chose ne peut jamais se comparer à elle-même.

L'hypothèse d'une forme d'espace changeant d'un lieu à l'autre écarterait la notion d'égalité du domaine de la géométrie, qui cesserait alors d'être une branche des mathématiques. On sait le rôle que cette notion joue dans toutes les mathématiques, rôle si essentiel qu'elle constitue la forme même des thèses dont on se sert presque partout dans cette science. Il est d'une haute importance que la formule exprimant le contenu des théorèmes de mathématiques se présente presque toujours comme une équation.

La structure parfaitement homogène de l'espace est donc une de ses qualités essentielles. Cet espace apparaît comme ensemble d'une foule d'éléments déterminés par les différentes valeurs des grandeurs variables sus-énoncées. Si l'on donne à chacune de ces variables *une valeur parfaitement déterminée*, on obtient l'élément appelé *point;* l'ensemble de tous les points obtenus en faisant varier une seule des grandeurs est la *ligne*, l'ensemble de tous les points qui ne diffèrent les uns des autres que par les valeurs de deux grandeurs est la *surface* (plan).

En raison de la structure partout égale de l'espace, l'établissement de ces valeurs doit avoir lieu de la même façon, quel que soit le point d'où l'on part; il est donc permis de choisir ce point, qui est *l'origine* de la détermination, d'une manière arbitraire, et les valeurs mesurées à partir de cette origine pour déterminer un autre point, sont les *coordonnées* de ce point.

Je renvoie, comme je l'ai déjà annoncé, au chapitre suivant l'examen du nombre de ces coordonnées, et je vais discuter d'abord l'aspect de l'espace à trois dimensions, le seul qui nous soit réellement connu. En cet espace, tout point sera déterminé par les trois coordonnées que nous désignons par les lettres x, y, z. Si nous les faisons varier en les soumettant à deux relations, nous avons une ligne, et, de toutes les lignes ainsi obtenues, il y a une espèce particulière qui porte le nom de *droite*. Nous arrivons à la notion de droite par la considération suivante.

Fixant la coordonnée z, donnons toutes les valeurs possibles à x et à y, et appelons *surface* x y la surface résultant de cette opération. Supposons maintenant qu'il y ait une équation entre les coordonnées x et y, ceci nous permettra de ramener ces deux variables à une seule dont les différentes valeurs détermineront une série continuelle de points, c'est-à-dire une ligne. Chacun de ces points sera donc déterminé par une variable unique jouant le rôle d'une nouvelle coordonnée : en ceci, la coordonnée z ne participe en rien. Donc, à cause de l'indépendance mutuelle qui existe entre les trois coordonnées, z, ne dépendant ni de x ni de y, ne dépend pas davantage du résultat de la combinaison de x et y faite sans son concours.

Conséquence : Toutes les lignes que l'on obtient en faisant varier seulement z et en gardant des valeurs constantes à x et à y ont le même rapport à chacune des lignes résultant de la variation de x et y tandis que z est invariable; dans l'espace intuitif, ce rapport entre deux éléments est ce qu'on nomme traditionnellement la position d'un élément vis-à-vis de l'autre, donc, on peut échanger entre elles toutes les lignes qui proviennent de la seule variation des coordonnées x et y sans altérer leur rapport à la coordonnée z.

C'est-à-dire : abstraction faite de ce rapport, la surface x y est mobile sur elle-même, et, comme cette qualité convient à chacune des surfaces obtenues en faisant varier la coordonnée z, on a le droit de dire : On peut faire mouvoir sur lui-même l'espace à trois dimensions, en sorte qu'il y a dans ce mouvement une ligne immobile. Cette ligne, ayant précisément la propriété qui caractérise la droite à la fois dans la géométrie d'Euclide et celle de Lobatschewsky, sera l'axe des coordonnées z. Or, dans l'espace considéré, qui a partout même structure, le choix de cet axe est absolument arbitraire; disons donc : Dans l'espace à trois dimensions, on peut tracer par chaque point une infinité de lignes répondant à la notion de droite telle qu'elle a toujours été reconnue dans la géométrie. L'existence de ces droites est une conséquence nécessaire de l'indépendance mutuelle des grandeurs fondamentales fixant les points de notre espace.

Reconnaissons la nature de la surface qui contient tous les points pour lesquels x et y, par exemple, sont variables, tandis que z est invariable. Si, gardant à l'une des premières coordonnées une même valeur constante, nous faisons varier l'autre, nous avons une *droite*, puisque la troisième coordonnée est aussi constante; donc, en toute sa longueur, cette droite appartient à la surface en question, et cette surface, déjà nommée la surface xy, a précisément la qualité par laquelle on définit ordinairement le *plan*, autant dans la géométrie d'Euclide que dans celle de Lobatschewsky.

On voit également qu'il y a un nombre infini de tels plans, puisque le choix des coordonnées x et y est parfaitement arbitraire, et qu'en vertu de la structure partout homogène de l'espace, ces plans sont tous congruents entre eux et composés de parties congruentes entre elles.

Nous sommes arrivés aux deux notions de droite et de plan, qui dépendent l'une de l'autre, par la même argumentation, et il nous a suffi pour cela de combiner trois principes fort simples, savoir : l'espace est intuitif, partout homogène, et les mesures qui déterminent ses divers points sont indépendantes les unes des autres; nous avons fait appel également au rapport qui existe entre les trois dimensions de l'espace, et, en particulier, ce n'est qu'en quittant la surface à deux dimensions et considérant la troisième coordonnée que nous avons vu se dévoiler à nos yeux la nature de la droite.

Je rappelle maintenant le raisonnement donné au précédent chapitre : j'y ai démontré que la géométrie euclidienne seule est en état de remplir les exigences du principe de détermination de coordonnées réciproques. Si une telle détermination est possible, comme l'on s'en souvient, dans le plan à deux dimensions, même sans l'emploi des parallèles euclidiennes, ceci ne peut plus s'admettre dès que l'on fait intervenir la troisième dimension de l'espace.

Le rôle important joué dans cette argumentation autant que dans les considérations exposées ci-dessus par la troisième dimension fait espérer la possibilité de démontrer l'existence des parallèles euclidiennes d'une façon plus simple, en n'utilisant que les moyens grâce auxquels j'ai réussi à faire surgir la notion de droite, c'est-à-dire surtout l'indépendance mutuelle des trois coordonnées. Cet espoir est rempli par les développements qui suivent.

Deux coordonnées étant mutuellement indépendantes, il s'ensuit que chacune d'elles a le même rapport avec chacune des deux moitiés de l'autre qui sont séparées par l'origine du système, ou que chacune des droites, sur lesquelles on mesure ces deux coordonnées, est perpendiculaire à l'autre. Ceci étant vrai de chaque couple de coordonnées, on a, comme base de détermination, trois droites perpendiculaires entre elles. L'homogénéité de l'espace fait en même temps que l'on peut construire un tel système à partir de tout point, en sorte que les coordonnées partant d'un point répondent respectivement aux coordonnées partant d'un autre. Pour parvenir d'un point de l'espace à un autre, il faut donc opérer trois mouvements répondant aux trois directions de coordonnées. Il peut se faire que l'un ou l'autre de ces mouvements étant nul, un mouvement unique suffise. La seule coordonnée qui, en ce cas, fixe la position de l'un des points vis-à-vis de l'autre, est déterminée, c'est la grandeur appelée ordinairement distance de ces points; donc, cette distance est précisément la grandeur qui représente le rapport mutuel des deux points, ce rapport étant évalué dans lè sens d'une seule coordonnée.

Soient maintenant deux points. Prenons leur droite comme base de la première coordonnée d'un système, et un point quelconque de cette droite comme origine. Tant que les points se meuvent sur cette droite, leur position, relativement à l'origine, sera déterminée par une valeur unique. Mais cet état change dès que les deux points quittent la droite pour avancer sur deux droites perpendiculaires à la première; alors, leur position vis-à-vis de l'origine et leur rapport mutuel seront déterminés par deux valeurs indépendantes l'une de l'autre.

Supposons, en particulier, que les mouvements des deux points au sens de la seconde coordonnée soient identiques; il est clair que le changement de position, opéré dans ce sens, n'altérera pas le rapport mutuel de ces points, attendu que ce changement est identique pour chacun d'eux. Après le mouvement comme avant, ce rapport mutuel ne sera déterminé que par une valeur mesurée dans le sens de la première coordonnée, et, après le mouvement, cette valeur sera la même qu'avant, car, sans cela, la première coordonnée serait influencée par des événements arrivant dans la deuxième, ce qui répugne évidemment à l'indépendance mutuelle des trois directions fondamentales que nous avons reconnue comme propriété indispensable de l'espace.

Or, on se souvient que la grandeur qui représente le rapport mutuel de ces deux points, prise dans le sens d'une seule coordonnée, n'était autre chose que la distance de ces points. On voit donc que, si deux points se meuvent de quantités égales sur deux perpendiculaires à la droite qui joint leurs positions primitives, pendant tout le mouvement leur distance demeure invariable, ce qui caractérise la géométrie euclidienne. Le théorème de cette géométrie qui déclare être partout la même la distance de deux droites perpendiculaires à une troisième, est justement la conséquence nécessaire de l'indépendance mutuelle qu'il faut supposer entre les trois directions constituant l'espace (1).

Cette situation ne répond pas seulement à la théorie d'Euclide, mais elle répond aussi à la notion de parallélisme telle qu'elle a toujours été conçue par un esprit dégagé de parti pris. En tout temps, le sens commun a regardé deux parallèles comme droites gardant toujours la même distance.

Or, c'est le devoir de la recherche scientifique d'examiner au point de vue critique cette notion innée, afin de voir si elle est compatible avec la notion de droite dérivée des propriétés fondamentales de l'espace. Il faut regretter qu'au lieu de suivre cette voie, les savants aient préféré adopter une nouvelle définition du parallélisme, en déclarant comme parallèles deux droites qui ne se rencontrent pas.

Certainement, deux parallèles ne se rencontrent pas, *mais, comme nous n'avons pas de moyen direct de connaître ce qui se passe au delà des bornes de l'espace limité, ouvert à notre expérience immédiate, notre compréhension de ce fait n'est pas une compréhension primitive*. De ce que deux parallèles, gardant la même distance dans l'espace homogène se trouvent toujours l'une vis-à-vis de l'autre dans une situation identique à celle d'où elles étaient parties, situation qu'elles gardent même quand on les prolonge indéfiniment, nous concluons qu'elles ne se coupent

(1) C'est maintenant que l'argumentation du chapitre précédent se présente sous un nouveau jour. Nous avons exigé que les coordonnées fussent indépendantes l'une de l'autre ; or, la détermination d'un point par des coordonnées réciproques, telle que l'explique la figure 1, ne satisfait pas à cette exigence ; en effet, la coordonnée OA $= x$ n'est pas la seule pour déterminer la ligne AI partant de A, et la direction de cette ligne dépend aussi de l'autre coordonnée OB $= y$; une détermination réciproque par le moyen de coordonnées indépendantes l'une de l'autre n'a résulté que de cette hypothèse : AI et BI perpendiculaires à OA et OB, donc OAIB est un véritable rectangle euclidien.

Nous voyons de même que les plans IAK, IBL, KCL qui se présentent dans la figure 2 n'ont pas d'abord la position complètement déterminée par une coordonnée que l'indépendance mutuelle des coordonnées exige ; ils ne répondent à cette exigence qu'au moment où l'on est sûr que c'est la structure euclidienne de l'espace qui, seule, garantit la parfaite réciprocité.

Aussi comprend-on facilement la connexion intime qu'il y a entre cette argumentation et celle que nous avons donnée ci-dessus. Le principe de réciprocité a surgi de la convertibilité absolue de la droite, et celle-ci, à son tour, est resultée de l'indépendance mutuelle des trois coordonnées de l'espace. Comme pour atteindre la notion de droite, il a fallu utiliser les rapports mutuels des trois dimensions, il n'est pas surprenant que dans le chapitre précédent il ait fallu, pour établir la géométrie euclidienne, revenir à la troisième dimension.

jamais. Mais cette propriété n'est qu'une notion dérivée, et c'est en essayant de baser toute la théorie du parallélisme sur cette notion que l'on a exercé une influence fatale sur le développement de la géométrie.

En définissant les parallèles comme droites ne se rencontrant pas, on a substitué à une idée positive et innée de l'esprit une définition absolument négative ; on a abandonné le fond sûr des parties de l'espace accessibles à notre intuition pour des théories basées sur des parties de l'espace fermées à notre connaissance immédiate.

C'est de cette façon que l'on est arrivé à donner cette malheureuse définition du parallélisme qui, en regardant deux parallèles comme droites se coupant à l'infini, introduit déjà insensiblement dans la géométrie toutes les conceptions qui servent de base à la géométrie non-euclidienne, et qui sont contraires à la notion naturelle de l'espace. En spécifiant qu'il n'y a pas de bornes aux constructions géométriques dont nous avons l'idée, nous considérons la notion de l'infini comme positive alors qu'elle peut être essentiellement négative. Cet emploi de la notion de l'infini est peu compatible avec la logique, et peut-être est-il permis de croire que la connaissance de cette incompatibilité va croissant de jour en jour.

V

LE NOMBRE DES DIMENSIONS DE L'ESPACE

L'étude précédente a donc conduit à ce résultat : Dans l'espace partout homogène et constitué par trois dimensions indépendantes l'une de l'autre, il ne saurait exister d'autre géométrie que celle qui est d'accord avec les hypothèses euclidiennes. Cependant, la recherche de la forme de l'espace n'est pas encore pour cela terminée, vu que la question se pose aussitôt de savoir s'il y a une étendue ayant plus de trois dimensions. L'examen critique de cette question est d'autant plus nécessaire que l'on aperçoit facilement une connexion intime entre elle et la question de la structure de l'espace. Rappelons-nous comment, dans le chapitre précédent, nous avons fait dériver la notion de droite; c'est en nous basant sur l'indépendance mutuelle des *trois* directions fondamentales de l'espace, abstraction faite d'une *quatrième* dimension possible. Eu égard à ce nouveau cas, on serait peut-être contraint à modifier les conclusions obtenues.

On sait que les rapports intrinsèques des figures du plan euclidien ne changent pas quand on déforme ce plan en le faisant devenir cylindre. Cette flexion déforme aussi certaines droites du plan, mais de sorte qu'un être dont l'horizon serait borné à cette surface n'aurait pas conscience du changement.

Nous savons, de plus, que l'espace euclidien renferme des surfaces de courbure constante et négative, et que, ainsi que Beltrami l'a démontré, les théorèmes de la géométrie lobatschewskienne sont vrais sur ces surfaces, à cette différence près, que les lignes qui y remplacent les droites ne sont pas des droites absolues. Mais un être dont l'horizon ne dépasserait pas une telle surface ne s'apercevrait pas qu'elles ne sont pas droites.

D'une façon analogue, on n'est pas certain d'abord que, s'il existe des lignes droites dans l'espace à trois dimensions, cette qualité franchisse les bornes de cet espace; peut-être y a-t-il lieu pour cela de supposer que cet espace fait partie d'un espace ayant plus de trois dimensions et composé d'un nombre infini d'autres espaces triplement étendus obéissant à des lois différentes, par exemple à celles de Lobatschewsky.

Les amis de la Pangéométrie ont encore plus besoin de supposer un espace à plus de trois dimensions, et il suffit, pour le voir, de jeter un coup d'œil sur les formules analytiques des nouvelles théories. On sait que les diverses formes que la pangéométrie connaît sont caractérisées par les valeurs positives ou négatives, réelles ou imaginaires de certaines grandeurs. Tout en employant ces valeurs, il ne faut pas oublier que les grandeurs négatives et imaginaires n'existent point par elles-mêmes; elles n'ont qu'une existence relative, servant de pendant à celle des grandeurs positives et réelles; sans ces dernières, il ne serait pas possible de parler des quantités négatives ou imaginaires.

Établir un espace caractérisé par une valeur imaginaire comme un espace existant seul est une pure absurdité; pour qu'une grandeur caractéristique se présente comme imaginaire, il faut qu'il existe une grandeur analogue mais réelle, à l'égard de laquelle peut se reconnaître le caractère imaginaire de la première grandeur. Donc, hors de l'espace en question, il faudra toujours supposer un autre espace, c'est-à-dire admettre un espace à quatre dimensions renfermant complètement les espaces à trois dimensions susnommés. De toutes les manières, on se trouve ainsi conduit à examiner cette question : Quel est le nombre des dimensions de l'Espace? Peut-on établir un espace ayant plus de trois dimensions ? Un essai sur les fondements de la géométrie qui laisserait cette question pendante passerait à bon droit pour imparfait.

Gauss a énoncé le premier cette thèse, qu'il n'est pas impossible que l'Espace ait plus de trois dimensions : Non déconcertés par l'autorité de ce grand géomètre, qui n'hésitait pas à douter de l'intelligence de ses contradicteurs, examinons si son hypothèse est vraie. Du temps de Gauss, on le sait, elle avait déjà beaucoup de partisans; aujourd'hui, elle a presque le rang de dogme, aussi faut-il d'autant plus s'étonner que ceux qui affirment la possibilité d'un Espace à quatre dimensions contestent néanmoins avec zèle son existence réelle.

Et pourtant, si l'on ne peut douter de la possibilité de l'existence de cet espace, si c'est la seule infériorité de notre esprit qui nous empêche de nous l'imaginer, nous ne pouvons savoir effectivement si cet espace existe en réalité, sans que nous en ayions une connaissance directe. Si les spiritistes admettent que des actions émanées d'un espace hors de notre sphère peuvent influencer le monde dans lequel nous vivons, personne n'est capable de les réfuter. Ce qui fait que tout le monde s'oppose avec énergie à ces hypothèses, c'est évidemment parce que le sens commun ne voit pas pourquoi la quatrième dimension, tout à fait semblable aux trois dimensions que nous révèle l'expérience, serait fermée à nos yeux.

Voyons néanmoins sur quels arguments est basée la théorie de l'espace à plus de trois dimensions. Le plus important est l'analogie avec l'algèbre, qui ne connaît pas de bornes pour le nombre des grandeurs variables dont ses formules se composent. Cet argument est irréfutable pour une conception ne voyant dans l'espace que le symbole extérieur des relations algébriques :

tant que ces dernières n'offrent point d'incompatibilité, on aurait alors le droit d'admettre des formes de l'espace offrant l'image réelle des formules algébriques, et, par ainsi, on établirait évidemment que le nombre des dimensions de l'espace est infini.

Mais on dévoile la faiblesse de cet argument aussitôt que l'on considère le caractère intuitif de l'espace réel, qui est, en vérité, un attribut indispensable de cet espace. C'est précisément par cette qualité que l'espace géométrique se diffférencie des prétendus espaces algébriques, et, par suite, c'est elle que nous devons examiner pour décider la question des dimensions.

Analysons pour cela ce que nous sentons en déclarant l'espace comme notion intuitive; il est facile de reconnaître que cette notion contient un fondement essentiel : les éléments que renferme l'espace ne sont point nécessairement isolés, au contraire, on peut embrasser d'un seul regard une foule d'entre eux. L'espace n'est donc pas seulement composé de points, mais doit être considéré comme ensemble d'éléments qui renferment eux-mêmes une infinité de points, de lignes, de surfaces, peut-être même d'êtres d'un rang plus élevé encore. Ainsi, l'on parvient à des notions parfaitement nouvelles qui ne se trouveraient point dans un espace conçu seulement comme image de l'algèbre.

Or, si l'on fait varier une des grandeurs qui composent la variété, il est essentiel, pour la notion de celle-ci, que l'on puisse avancer de chacun de ses points en deux directions opposées; donc, dans l'ensemble des points obtenus par la variation de la grandeur en question, c'est-à-dire dans la ligne, on peut distinguer deux moitiés séparées par un point quelconque; chacune des moitiés naît du mouvement contraire à celui par lequel l'autre est établie. Ainsi, chaque ligne a un double sens; nous allons voir que l'ensemble des lignes, ou la surface doublement étendue, peut se comprendre aussi en un double sens.

Nous avons déjà exposé qu'une telle surface s'obtient en faisant varier deux des diverses grandeurs indépendantes entre elles dont la variation constitue tout l'espace. Désignons par x_1 et x_2 ces deux variables, et considérons la surface qui est le produit de leur variation. Par chaque point de cette surface on peut tracer la ligne, caractérisée par une valeur constante de x_2, x_1

changeant indéfiniment, et l'on peut aussi tracer une seconde ligne renfermant tous les points obtenus par une valeur fixe de x_1 et des valeurs indéfiniment variables de x_2.

Sur chacune de ces lignes on peut distinguer deux moitiés séparées par le point commun susdit, et, comme elles sont opposées l'une à l'autre, il est permis de les désigner par $+x_1$, $-x_1$; $+x_2$, $-x_2$.

En dehors de ces lignes, il y en a une infinité d'autres passant par le point en question; on les obtient en faisant varier simultanément x_1 et x_2, de façon à ce qu'elles satisfassent à une relation quelconque. Par exemple, on peut passer de la première des lignes susdites aux voisines en diminuant peu à peu la variation de x_1 et faisant croître constamment la grandeur x_2, primitivement fixe. On s'éloigne ainsi de plus en plus de la première ligne pour se rapprocher, en même temps, de la seconde, que caractérise une valeur constante de x_1. Comme les deux droites sont dans le même rapport l'une à l'égard de l'autre, en continuant ce mouvement, on reviendra de la seconde à la première.

Voici donc une marche circulaire par laquelle se fait l'établissement de toute la surface étudiée; il est clair que cette marche peut avoir lieu de deux façons, car chacune des deux moitiés de la première ligne ayant le même rapport à chacune des deux moitiés de la seconde, deux chemins s'ouvrent. En suivant le premier, on passera de la première ligne à la seconde, de sorte que tous les points de la moitié $+x_1$ viennent coïncider avec ceux de la moitié $+x_2$, tandis qu'en même temps la moitié $-x_1$ coïncide avec $-x_2$. La continuation du mouvement fait coïncider $+x_2$ axec $-x_1$ et $-x_2$ avec $+x_1$.

En suivant le second chemin, la moitié $+x_1$ coïncidera d'abord avec $-x_2$, et $-x_1$ avec $+x_2$; ensuite $-x_2$ avec $-x_1$ et $+x_2$ avec $+x_1$. C'est-à-dire que, pour construire le plan x_1x_2 par le mouvement d'une droite passant par un point quelconque de ce plan, on peut procéder de deux manières, en suivant l'une des deux dispositions :

$$+x_1 \quad +x_2 \quad -x_1 \quad -x_2 \quad +x_1 \ldots\ldots \text{(A)}$$
$$+x_1 \quad -x_2 \quad -x_1 \quad +x_2 \quad +x_1 \ldots\ldots \text{(B)}$$

Il n'y en a point d'autres; elles se déduisent l'une de l'autre par le changement de x_2 en $-x_2$, et montrent que l'on peut concevoir le plan x_1x_2 comme produit par le mouvement susdit en double sens.

Ceci posé, considérons le rapport de ce plan à la troisième coordonnée de l'espace à trois dimensions, coordonnée que nous désignons par x_3. On peut mesurer ses valeurs sur une droite passant par le point qui était déjà l'origine des coordonnées x_1 et x_2; sur cette droite, nous distinguons deux moitiés que l'on peut désigner par $+x_3$ et $-x_3$, et le point qui les sépare est l'origine commune des coordonnées x_1, x_2 et x_3. C'est par ce point que nous avons fait passer la ligne décrivant dans son mouvement le plan x_1x_2, et comme ce mouvement peut être pris dans deux sens, un rapport mutuel entre les deux moitiés de la droite x_3 et les deux dispositions (A) et (B), possibles sur le plan x_1x_2, s'offre de lui-même. Par exemple, on peut convenir que la moitié $+x_3$ et le sens (A) ont entre eux la même relation que la moitié $-x_3$ et le sens (B).

Ceci est toujours vrai, quel que soit le point qui sert d'origine aux trois coordonnées, chacune des droites sur lesquelles on mesure la coordonnée x_3 a deux moitiés séparées l'une de l'autre par un point du plan x_1x_2; il s'ensuit que, dans un espace qui n'est déterminé que par les trois coordonnées $x_1\,x_2\,x_3$, il est impossible de parvenir d'un point de la moitié $+x_3$ à un point quelconque de la moitié $-x_3$ sans traverser le plan x_1x_2; les deux moitiés de la coordonnée x_3 se faisant essentiellement pendant vis-à-vis du plan x_1x_2, le passage d'une moitié à l'autre est déterminé par ce plan même.

Aussi, est-il impossible que les droites fondamentales de l'espace à trois dimensions soient rentrantes en elles-mêmes si elles ne quittent pas cet espace. Elles ne pourraient revenir ainsi sans en sortir, ce qui entraînerait inévitablement cette hypothèse que l'espace à trois dimensions soit contenu dans un espace à plus de trois dimensions. Et si l'on était conduit à nier l'hypothèse de cet espace multiple, on aurait en même temps le droit de déclarer que l'espace triplement étendu n'est nullement un élément d'espace supérieur, mais que c'est plutôt un espace autonome, dont chaque dimension est infinie, et dont les lignes fondamentales ne rentrent jamais en elles-mêmes.

Par l'analyse de la structure de l'espace triplement étendu, que nous venons de donner, nous avons maintenant les moyens de juger de la structure qu'il faudrait trouver dans un espace de quatre dimensions. Il est clair qu'il renfermerait un nombre infini d'espaces à trois dimensions, de même que celui-ci est l'ensemble d'innombrables surfaces à deux dimensions.

Nous avons vu comment l'espace à trois dimensions se montre composé, au point de vue d'un tel ensemble. Nous avons pu choisir chaque point d'une surface à deux dimensions comme origine des deux moitiés d'une droite représentant la troisième dimension, en sorte que chaque moitié répondît à l'une des deux conceptions qui sont seules admissibles sur cette surface. Ceci peut s'exprimer autrement, ainsi : le double sens dans lequel on peut prendre la surface doublement étendue lui donne une certaine *bilatéralité*, qui permet d'enfiler un nombre indéfini de surfaces pareilles le long d'une droite, en sorte que, si l'on suit cette droite dans une de ses deux directions, toutes les surfaces se présentent sous l'un des deux aspects exposés plus haut, peut-être sous l'aspect (A), tandis qu'en suivant la droite dans la direction opposée, elles se présentent sous l'autre aspect, peut-être (B) (1).

D'une façon analogue, il faudrait qu'un espace de quatre dimensions pût se considérer comme l'ensemble d'espaces à trois dimensions enfilés le long d'une ligne qui représenterait la quatrième dimension. Chacun des espaces que caractériserait une valeur constante de la quatrième coordonnée x_4 et des valeurs indéfiniment variables des trois premières coordonnées $x_1 x_2 x_3$ serait percé par cette ligne en un point, et comme elle s'étend à partir de ce point suivant les deux directions $+x_4$ et $-x_4$, il serait indispensable que, pour répondre au choix fait de l'une ou de l'autre des directions de la ligne x_4, chacun des espaces à trois dimensions pût aussi être pris dans un double sens.

Bref, il faudrait trouver dans l'espace triplement étendu une

(1) Toutes les surfaces ont un double sens tel que nous l'avons exposé ; il ne faut même pas en excepter les surfaces qu'on appelle *unilatères*, c'est-à-dire les surfaces dont les deux côtés se transforment l'un dans l'autre, car en faisant mouvoir une ligne, de façon à ce qu'elle décrive une telle surface, il y a deux chemins opposés pour faire reprendre à cette ligne sa position initiale.

bilatéralité analogue à celle que nous avons analysée plus haut, dans la surface à deux dimensions. Or, rappelons-nous que cette bilatéralité de la surface est le produit de la description de cette surface par le mouvement d'une ligne à une dimension autour du point fixe par lequel passait la ligne x_3, et que, pour ce mouvement, on pouvait suivre indifféremment le sens (A) ou le sens (B).

Pour se conformer à cela, il faudrait pouvoir engendrer l'espace triplement étendu dans un double sens, en faisant mouvoir une surface doublement étendue, de façon à ce qu'elle contienne toujours le point fixe où la ligne x_4 perce l'espace $x_1\, y_2\, x_3$.

Ce mouvement ne peut s'opérer qu'en choisissant une ligne fixe passant par le point considéré, et chacune des surfaces qui contiennent cette ligne, se déplaçant, de sorte que cette ligne garde sa place primitive, engendrerait l'espace triplement étendu dont nous parlons. On pourrait, par exemple, choisir le plan $x_1 x_2$ pour surface génératrice. En remplaçant successivement la valeur de x_2 par d'autres valeurs, jusqu'au moment où l'on reviendrait à la valeur primitive, on donnerait à ce plan un mouvement qui lui ferait engendrer l'espace $x_1 x_2 x_3$, et durant lequel la ligne x_1 garderait sa position, ce que nous avions demandé.

Il est clair que ce mouvement pourrait se produire dans un double sens, car les substitutions de la coordonnée variable seraient susceptibles d'avoir lieu dans l'ordre $+x_2 + x_3 - x_2 - x_3 + x_2 \ldots\ldots$, ou dans l'ordre inverse $+x_2 - x_3 - x_2 + x_3 + x_2 \ldots\ldots$ Il semble donc que l'on ait ainsi découvert la bilatéralité demandée dans l'espace à trois dimensions.

Cependant, il est facile de voir que cette bilatéralité n'est basée que sur une fausse apparence. En effet, pour l'obtenir, il a fallu choisir d'abord une ligne qui, pendant tout le mouvement que nous venons de décrire, demeurât fixe. Toutes les lignes de l'espace considéré peuvent remplir ce rôle de directrices, car elles sont toutes équivalentes et aucune d'elles n'est privilégiée. Et comme nous n'avons pas le droit de donner à l'une d'elles une préférence arbitraire, il y a un nombre infini de moyens distincts d'obtenir la bilatéralité dont nous avons besoin pour l'espace à trois dimensions.

Mais cette bilatéralité indéterminée et arbitraire ne suffit pas à notre objet; il nous faut une bilatéralité d'espace qui nous permette de supposer une relation entre les deux moitiés de la ligne x_4 et les deux conceptions auxquelles il serait possible de soumettre l'espace $x_1 x_2 x_3$. Le seul élément commun à cette ligne et à cet espace était le point où la première perce le deuxième; donc, il nous fallait une bilatéralité complètement déterminée par ce point seul, et résultant nécessairement de la nature intrinsèque de l'espace à trois dimensions considéré.

Les surfaces à deux dimensions possèdent cette bilatéralité, mais l'espace à trois dimensions en est privé, puisque nous y avons trouvé plutôt un nombre infini de formes sous lesquelles il nous apparaît comme bilatéral, selon le nombre infini de lignes directrices qui s'offrent pour les différents cas de sa génération.

Que si l'on choisit un de ces cas en particulier, on crée une bilatéralité qui n'*est pas l'essence même de cet espace*, et qu'on lui donne arbitrairement. Cette bilatéralité, cela est clair, ne lui appartient pas en tant que qualité intrinsèque; elle lui est apportée du dehors, et ne permet pas d'établir un rapport entre cet espace et les deux moitiés de la ligne x_4, rapport que nous avions reconnu comme condition indispensable pour admettre l'existence d'un espace de quatre dimensions.

Il faut donc reconnaître qu'il n'y a pas de place dans l'espace pour la quatrième dimension; celle-ci disparaît, et, — comme chacun le verra aisément en analysant ses propres sentiments, — elle disparaît à la suite d'un raisonnement qui n'est que la traduction exacte des motifs pour lesquels le sens commun a toujours énergiquement refusé d'admettre l'hypothèse d'un espace de quatre dimensions.

La quatrième dimension disparue, il est évident qu'il ne saurait y avoir de place pour une autre. Le seul espace capable d'une existence réelle est donc l'espace à trois dimensions, et, en ce qui le concerne, nous avons reconnu plus haut qu'il était obligatoire de lui supposer une étendue infinie dans toutes les directions.

Voici donc notre étude achevée [1]. En avançant pas à pas,

[1] On trouve d'autres études sur le thème discuté ci-dessus, ainsi qu'en particu-

nous nous sommes d'abord convaincus que la géométrie lobatschewskienne ne répond pas complètement aux hypothèses sur lesquelles elle est basée, et qu'il faut reconnaître la nécessité des suppositions d'Euclide, dont elle avait douté; nous avons pu, en second lieu, mettre hors de doute que les notions fondamentales de l'espace euclidien à trois dimensions résultent nécessairement des conceptions que chaque esprit intelligent possède sur l'idée même de l'espace; enfin, nous avons pu démontrer, en toute évidence, que la nature de cet espace défend de lui supposer une quatrième dimension.

En résumant tout cela, nous pouvons énoncer ce résultat : Il n'y a effectivement qu'une seule géométrie d'accord avec la nature même de l'espace, c'est celle de l'espace à trois dimensions, infini en toutes les directions, et conforme aux hypothèses d'Euclide.

Fr. Pietzker (Nordhausen).

Note de la rédaction. — *Nous devons la rédaction française de cette intéressante étude au bienveillant concours de M. et Mme* Barbarin, *à Bordeaux. Ils ont bien voulu traduire les trois premiers chapitres et revoir la traduction des chapitres IV et V due à M. Pietzker. Au nom de l'auteur et en notre nom personnel nous tenons à leur exprimer ici notre vive reconnaissance pour les soins qu'ils ont donnés à cette rédaction.*

---

lier un examen critique des théories établies par divers savants sur les bases des conceptions nouvelles de l'espace, dans l'ouvrage déjà cité de l'auteur *Die Gestaltung des Raumes*. (La forme de l'Espace). (Voir la note, p. 11.)