I LA QUESTION DE LA FORME DE L'ESPACE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

CONSIDÉRATIONS

SUR LA NATURE DE L'ESPACE

I

LA QUESTION DE LA FORME DE L'ESPACE

On sait que parmi les propositions qui servent de base au système de Géométrie parvenu de l'antiquité jusqu'à nous se trouve celle-ci : Par un point il ne peut être tiré qu'une seule parallèle à une droite. Des essais tentés pour en prouver la nécessité intrinsèque ont surgi certaines difficultés; ceci, nous le savons, a eu pour conséquence d'amener à douter de cette nécessité, et à considérer une forme d'espace dans laquelle la proposition susdite n'est pas admise

C'est ainsi qu'il s'est formé une branche très étendue de recherches mathématiques, que l'on nomme le plus habituellement Géométrie non-euclidienne, parce qu'elle s'écarte de l'œuvre d'Euclide en rejetant la proposition ci-dessus [1]. On emploie également les noms de Pangéométrie, Géométrie absolue et Métagéométrie.

Les deux premiers indiquent que la nouvelle étude de l'espace renferme comme cas particulier la Géométrie euclidienne ; le troisième trouve son explication en ce que la forme de l'Espace non-euclidien sort de l'expérience à notre portée, en telle manière qu'il y a le même rapport entre cet espace et la Géométrie pra-

[1] On la désigne le plus souvent sous le nom de onzième axiome d'Euclide. Elle n'a été ajoutée au système que plus tard, pour remplacer le cinquième postulatum établi d'abord par Euclide, et d'après lequel deux droites coupées par une troisième doivent se rencontrer nécessairement lorsqu'il y a entre leurs angles une certaine relation. C'est effectivement là la forme employée ultérieurement pour la conception des parallèles d'Euclide.

tique que nous étudions, qu'entre la Métaphysique et la Physique [1].

Cette branche des recherches géométriques a continué à se développer dans une double direction. On s'est efforcé en premier lieu de construire, à l'exemple du système établi par Euclide d'après la proposition énoncée, un système également complet, indépendant de cette proposition, mais dans lequel toutes les autres hypothèses du système euclidien sont conservées.

Cette tâche a été plus particulièrement entreprise par les deux Hongrois, W. et J. Bolyai et par le Russe N.-I. Lobatschewsky, en suivant certaines conceptions que Gauss avait déjà formulées. Ils sont parvenus de la sorte à établir une géométrie qui non seulement renferme la Géométrie euclidienne comme cas particulier, mais qui se rapproche d'autant plus du système de cette Géométrie que le domaine dans lequel les figures de l'espace sont considérées a des dimensions plus restreintes. En conséquence on doit se poser cette question :

L'espace possède-t-il véritablement une forme différente de celle convenue dans le théorème des parallèles euclidiennes, sans que nous puissions avoir connaissance de cette déviation de la forme euclidienne, en raison du peu d'étendue du domaine ouvert à notre expérience ?

En même temps que l'on procédait à cette construction de la Géométrie non-euclidienne qui ne se sépare des hypothèses transmises que dans la question des parallèles, et conserve, par ailleurs, toutes les autres données fondamentales, on se prenait aussi à mettre en question la nécessité absolue de ces principes fondamentaux. Au premier abord, ce n'était que très naturel, en raison de toutes les tentatives faites pour prouver l'axiome des parallèles d'Euclide. Car, au fond, toutes ces tentatives consistaient à essayer de reconnaître dans cet axiome une conséquence nécessaire des autres. En essayant de ramener l'axiome des parallèles à ces hypothèses de la Géométrie euclidienne, on se trouvait naturellement conduit à se demander si ces hypothèses étaient bien, comme on le croyait, des conceptions nécessaires.

---

(1) Quoique le nom de Métaphysique n'eût autrefois qu'une signification purement externe, rien n'est changé à la signification interne qu'on lui donne communément aujourd'hui.

Cette recherche a toujours continué à prendre de l'extension; on trouve un exposé résumé de son état actuel dans le mémoire publié par M. D. HILBERT, à l'occasion de l'inauguration du monument de Gauss-Weber à Gœttingue; dans cet écrit qui a pour titre : *Grundlagen der Geometrie* (1) (Fondements de la Géométrie), les axiomes sont divisés en cinq groupes, et dans chaque groupe il discute les conclusions de l'abandon de tel ou tel axiome.

Cette extension, que je voudrais signaler comme développement philosophique faisant contraste avec les opérations constructives de la Géométrie non-euclidienne, a été favorisée par une série de circonstances qui l'ont maintenue en même temps dans une certaine voie.

BELTRAMI remarqua que les relations qui existent dans le système de Bolyai et de Lobatschewsky montrent une grande analogie avec celles qui existent sur les surfaces à courbure constante et négative. Ceci conduisit à établir un système comparable à ce qui se passe sur les surfaces à courbure constante et positive, et, par ainsi, à enrichir la Géométrie d'une forme nouvelle d'espace, dans laquelle on abandonnait en même temps deux suppositions jugées jusque-là indispensables : l'impossibilité pour deux droites de se couper en plus d'un point, et l'étendue infinie de l'espace.

La mesure toujours croissante dans laquelle la validité des aperçus géométriques arrivés jusqu'à nous a été soumise à un examen critique, a eu pour résultat de résumer toute la discussion dans la question importante de savoir quelles sont, dans notre science géométrique, la part de l'expérience d'un côté, celle de la nécessité logique de l'autre; et cette appréciation, que cela seul est logiquement nécessaire qui peut s'exprimer par une formule mathématique, a gagné de plus en plus en autorité. Quant à la direction dans laquelle toute la recherche a continué à se développer, elle s'est précisée dans cette idée qui ne veut apercevoir derrière le changement des figures géométriques que la personnification visible de la transformation algébrique.

(1) B. G. TEUBNER, Leipzig, 1899. — Traduit en français par M. LAUGEL, *Ann. de l'École Normale*, t. XVII, 1900. (LA RÉDACTION.)

Arrivées à ce point, les études ne se sont pas bornées à l'espace à trois dimensions. Partant de ceci, que dans l'Algèbre le nombre des variétés d'expressions est illimité, on est parvenu à ne considérer l'espace triplement étendu que comme cas particulier d'un espace général ayant un nombre arbitraire de dimensions; en ceci, comme presque partout ailleurs, on a suivi des voies parcourues d'abord, ou du moins indiquées par Gauss.

Ainsi, dans nos recherches mathématiques, les choses en sont là : à côté de l'espace conforme aux suppositions de la Géométrie euclidienne, et que l'expérience nous rend familier, on prend encore en considération les différentes autres formes possibles de l'espace. Tout en conservant la plus grande partie des hypothèses euclidiennes, il reste toujours encore deux catégories de formes d'espace qui, par la généralisation d'un aperçu propre à l'étude des surfaces, sont considérées comme espaces de courbure positive et négative; entre ces deux formes, l'espace euclidien, dont le signe caractéristique est la courbure de valeur zéro, prépare la transition.

II

LES PREUVES DE POSSIBILITÉ D'UNE FORME NON-EUCLIDIENNE DE L'ESPACE

Tout en m'apprêtant à soumettre à un examen critique les fondements de l'espace considéré à la façon moderne, je voudrais d'abord mettre en pleine lumière les points de vue auxquels je me place dans cet examen. Je ne méconnais en aucune manière les progrès que la recherche mathématique a faits, en ce sens que chaque conclusion de la théorie a précisé la part revenant aux différentes hypothèses du système géométrique considéré. Le bénéfice que la recherche géométrique a, sans sortir du système euclidien, retiré de son travail, nous est montré clairement par un coup d'œil jeté sur la Géométrie projective; tout en comblant les lacunes laissées par M. Von Staudt, les recherches de la Géométrie non-euclidienne ont fourni l'occasion de développer utilement cette branche. Je paie un tribut d'admiration à la