III ÉTABLISSEMENT DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PAR LE PRINCIPE DE LA DÉTERMINATION RÉCIPROQUE AU MOYEN DE COORDONNÉES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

III

ÉTABLISSEMENT DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PAR LE PRINCIPE DE LA DÉTERMINATION RÉCIPROQUE AU MOYEN DE COORDONNÉES

On peut en tous les cas établir que si des lacunes ont été reprochées jusqu'à présent aux essais des partisans de la forme euclidienne de l'espace, il n'y a pas moins de grandes faiblesses dans les arguments par lesquels on a voulu mettre hors de doute l'impossibilité d'asseoir sûrement la Géométrie euclidienne.

Conclusion : la question est toujours pendante, et l'on ne peut *a priori* renoncer à prouver, par un nouvel essai, la possibilité unique de la forme euclidienne. Un tel essai, pour avoir des chances de réussite, doit satisfaire à une série d'exigences qui surgissent du développement acquis par la discussion sur la question de la possibilité de l'Espace. Il devra éviter les fautes qui ont été avec raison reprochées jusqu'ici aux essais de preuve entrepris dans l'un et l'autre sens, renoncer à l'emploi de certaines idées impropres que la discussion sur la Géométrie non-euclidienne avait été amenée à utiliser; il ne sera pas moins obligé d'écarter des notions tout à fait incapables de précision absolue, comme par exemple celle de direction, admise par quelques preuves de la conception euclidienne.

Cet essai de preuve doit ensuite satisfaire à la condition que le domaine de l'espace considéré par lui possède une étendue finie, ceci afin de prévenir dès le début toutes les objections qui ont été élevées, par exemple, contre la preuve de Bertrand.

En même temps, la critique des raisonnements établis en faveur de la Géométrie euclidienne indique de façon claire et positive la direction dans laquelle la recherche devra se tenir si elle veut arriver à son but. Elle devra considérer avant tout, comme des facteurs de la plus grande importance, le développement multiple de l'espace et l'inversion complète de la droite, inversion qui n'a de sens que dans cet espace multiplement étendu et partout homogène.

On peut satisfaire aux prescriptions négatives et positives qui viennent d'être citées par une démonstration basée sur la représentation de l'espace de Lobatschewsky. Mais, parmi les innombrables possibilités que cette représentation de l'espace renferme en soi se trouve aussi la forme euclidienne, et nous allons démontrer que les hypothèses fondamentales transportées du système euclidien dans le système de Bolyai-Lobatschewsky ne peuvent trouver leur complète réalisation que dans le cas unique de cette forme.

Pour comprendre cette démonstration (1), établissons d'abord quelques propositions, utiles à considérer, qui tantôt s'appliquent généralement à la Géométrie de Bolyai, et par conséquent sont valables pour la Géométrie non-euclidienne comme pour l'euclidienne, tantôt ont une forme différente selon que l'on admet ou que l'on rejette la forme euclidienne de l'espace.

A côté des conditions de congruence des triangles, sont également vraies dans les deux formes de l'espace les propositions suivantes :

1° Dans chaque triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, donc en particulier dans le triangle rectangle l'hypoténuse est le plus grand côté. 2° Une droite perpendiculaire sur deux autres droites sécantes est perpendiculaire sur le plan qu'elles déterminent. 3° Si une droite sécante à un plan est perpendiculaire sur une droite de ce plan, sa projection orthogonale sur le plan est aussi perpendiculaire sur la seconde droite. 4° Deux droites tombant dans deux plans et perpendiculaires à la ligne d'intersection de ces plans au même point forment quel que soit ce point des angles de même grandeur.

La somme des angles des figures planes n'a une valeur déterminée qu'en Géométrie euclidienne, où la somme des angles du triangle vaut deux droits, et celle du quadrilatère quatre droits. Dans tout autre cas que celui de cette Géométrie, la somme des angles du triangle reste inférieure à deux droits, et celle du quadrilatère inférieure à quatre droits. D'après cela, l'existence d'un quadrilatère avec quatre angles droits séparés n'est possible que dans l'espace euclidien.

---

(1) On trouve un développement plus ample de cette idée dans le mémoire de l'auteur : *Die Gestaltung des Raumes.* (La forme de l'espace), Brunswick, O. Salle, 1891, chap. II, p. 18-29.

Commençons maintenant la démonstration proprement dite, en jetant un coup d'œil sur cette propriété dont jouit l'espace euclidien : Une détermination entreprise dans cet espace au moyen de coordonnées cartésiennes est entièrement réversible. En effet, quand on a OA $= x$, OB $= y$ représentant les coordonnées planes et rectangulaires d'un point I; on a en même temps de l'autre côté, IB $= x$, IA $= y$; ces deux segments (*strecken*) sont perpendiculaires l'un sur l'autre au point I et peuvent déterminer le point O en partant de I. Cette seconde détermination n'est que le pendant réciproque de celle par laquelle le point I a été obtenu en partant de O. Cette réciprocité existe aussi quand on passe du plan à l'espace. Pour déterminer le point Q, ajoutons aux coordonnées précédentes la troisième coordonnée OC $= z$. En nommant K le quatrième sommet du rectangle formé par OA et OC, L celui du rectangle formé par OB et OC, on voit qu'alors A, B et C sont les quatrièmes sommets de trois rectangles qui possèdent le sommet commun Q, et sont congruents respectivement des rectangles contigus en O précédemment cités. La détermination du point O depuis Q est donc aussi dans ce cas le pendant réciproque de la détermination du point Q depuis O.

Aussitôt qu'on renonce aux suppositions de la géométrie euclidienne, la détermination qui vient d'être décrite perd le caractère de la réciprocité. En effet, en abaissant des points I du plan xoy des perpendiculaires sur les axes de coordonnées passant par O, dans tout autre cas que celui de la géométrie euclidienne, non seulement ces perpendiculaires diffèrent dans leur longueur des segments (*Strecken*) OA et OB, mais encore, à considérer leur inclinaison, on voit qu'elles ne forment ensemble ni un angle droit, ni même un angle de grandeur invariable pour tous les points I.

On ne parvient pas davantage à la réciprocité absente si l'on fait concourir à la détermination du point I au moyen des coordonnées OA$=x$, OB $=y$ les lignes particulières que l'on nomme en géométrie lobatschewskienne équidistantes d'une droite. En menant par le point A la ligne de distance x à l'axe OY, et par le point B la ligne de distance y à l'axe OX, on trouve toujours naturellement de cette manière un point I bien déterminé, mais les axes de détermination qui se coupent en ce point ne possèdent même plus le caractère de lignes droites; en tous cas ces axes ne sont pas égaux aux premiers axes de coordonnées.

La forme parfaitement régulière de l'espace qui est supposée dans la géométrie de Lobatschewsky exige aussi pour l'espace obéissant aux lois de cette géométrie la possibilité d'une *détermination réciproque au moyen de coordonnées.* Car il va de soi, par la nature même de cette détermination, qu'en établissant la position du point Q d'après le point de départ O, se détermine aussi d'elle-même la position du point O vis-à-vis du point Q; l'égalité de structure de l'espace, telle qu'il n'y a aucune différence de position entre les points O et Q, demande impérieusement que cette réciprocité de position s'exprime par la réciprocité de la détermination au moyen de coordonnées. En effet, on peut satisfaire à cette exigence, quand on reste dans le plan.

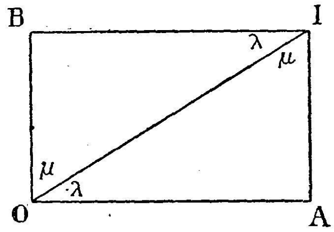

Fig. 1.

La manière dont ceci est possible est indiquée par la figure ci-dessus, dans laquelle sont tirés à partir de O deux axes perpendiculaires qui forment avec la ligne OI les angles λ et μ. Si l'on fait ensuite sur OI au point I des angles égaux respectivement aux précédents et occupant par rapport à eux des positions alternes, on forme le quadrangle OAIB qui possède des angles droits en O et I, tandis que les angles A et B ne sont droits que dans le cas de la géométrie euclidienne, et dans les autres cas sont aigus. Je désignerai par le nom de *rectangloïde* une figure de l'espèce du quadrangle OAIB et j'appellerai *diagonale principale* la ligne qui joint les sommets des deux angles droits, et l'autre diagonale, *diagonale secondaire.* Comme il est facile de le voir, les triangles OIA et OIB sont congruents, donc IB $=$ OA, et IA $=$ OB ; il en résulte alors que la diagonale secondaire doit partager le quadrangle en deux triangles congruents, et qu'ensuite les diagonales se coupent en leur milieu.

De cet état de choses on déduit pour déterminer le point I à partir de O le procédé suivant :

Qu'on trace à partir de O deux droites perpendiculaires sur lesquelles on prend les segments OA $= x$, OB $= y$, qu'on tire ensuite la droite AB et qu'on joigne son milieu à O, on obtient le point I en prolongeant d'une longueur égale à elle-même au delà du milieu cette ligne de jonction. La construction est évidemment tout à fait retournable.

On voit que, pour l'établissement d'un système réciproque de coordonnées dans le plan doublement étendu, il n'est pas nécessaire de supposer l'axiome euclidien de parallèles; en abandonnant cet axiome, il est parfaitement possible d'établir un tel système.

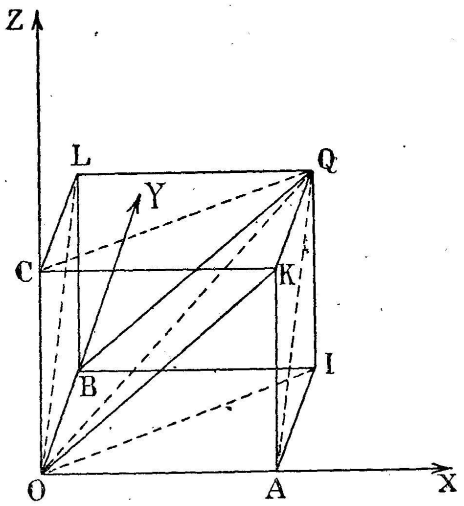

Fig. 2.

Examinons maintenant la situation que nous rencontrons, en employant ce mode de détermination pour l'espace à trois dimensions.

A cette fin, nous choisissons d'abord un point quelconque de cet espace comme origine de détermination; par ce point, nommé O, nous traçons trois droites perpendiculaires chacune aux deux autres, et sur ces droites, nous mesurons les segments $OA = x$. $OB = y$, $OC = z$, la question se pose alors de savoir où est situé le point de l'espace déterminé par ces trois coordonnées.

Dès l'abord, il est clair que ce point sera le point d'intersection de trois plans passant, l'un par le point A, le second par le point B, le troisième par le point C; mais ces déterminations ne suffiraient pas pour déterminer assez la position de ces plans. Donc, il est nécessaire de chercher une règle complémentaire et aboutissant à une construction réciproque.

Dans la géométrie euclidienne la règle est la suivante : on y construit les plans en question comme perpendiculaires aux axes Ox, Oy, Oz. Mais dans notre cas, cette construction n'est pas admissible dès l'abord, puisque nous ne supposons d'avance que les hypothèses et les théorèmes que connaît aussi la théorie lobatschewskienne.

Malgré cela, il est possible de parvenir à une règle suffisante en considérant la figure 2, qui nous montre les trois coordonnées en question.

Nous voyons en cette figure, les points I, K, L, qu'on obtient en construisant les rectangloïdes OAIB, OAKC, OBLC. Le point I a les coordonnées $x = OA$, $y = OB$, $z = O$; de même les coordonnées de K sont $x = OA$, $y = O$, $z = OC$; celles du point L sont $x = O$, $y = OB$, $z = OC$.

Après cela, cherchons la position du point dont les coordonnées sont $x = OA$, $y = OB$, $z = OC$. Comme la règle que nous cherchons doit embrasser aussi le cas où l'une ou l'autre des trois coordonnées est égale à zéro, il faut que les plans passant par les points A et B renferment encore le point I qui a les coordonnées $x = OA$, $y = OB$, $z = O$.

Pour la même raison, il faut demander que le plan passant par le point A renferme aussi le point K, que le plan passant par B renferme également le point L, et enfin que le plan passant par C passe par les deux points K et L. Nous arrivons ainsi à la règle cherchée qui nous donne une détermination complètement suffisante pour la détermination des trois plans en question; c'est la suivante :

Pour trouver le point dont les coordonnées sont $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, on construira les rectangloïdes OAIB, OAKC, OBLC, puis on construira les trois plans IAK, IBL, KCL, le point d'intersection de ces trois plans est le point cherché.

Cette construction résultant nécessairement de la construction énoncée plus haut pour la surface doublement étendue, et, comme celle-ci, ne supposant que les hypothèses de la théorie lobatschewskienne, ne remplirait pas encore, sous la forme où nous venons de l'obtenir, la condition d'être réciproque; il faut la compléter pour ce but. Comme nous nous en souvenons, le principe des coordonnées réciproques a exigé que la construction par laquelle le point Q était déterminé vis-à-vis du point O, nous donnât une détermination tout équivalente du point O en partant du point Q.

Le point O est le sommet commun des trois quadrilatères OAIB, OAKC, OBLC, qui sont tous rectangloïdes ; au point Q se rencontrent les quadrilatères QKLC, QIBL, QIAK; pour que la construction soit réciproque, il faut que ces trois quadrilatères, dont la forme était jusque-là indéterminée, soient congruents aux rectangloïdes OAIB, OAKC, OBLC, de manière que les points C, A, B, répondent aux points I, K, L.

Par exemple, l'angle KCL sera alors égal à l'angle AIB, mais comme celui-ci est égal à l'angle AOB, que nous avons supposé dès l'abord comme droit, l'angle KCL aura également la grandeur d'un droit. Parmi les angles dont les côtés partent des points O et C, il y en aura donc quatre qui, en tous cas, se présentent comme angles droits; outre les angles mentionnés tout à l'heure AOB et KCL, ce seront les angles AOC et BOC ; quant aux angles OCK et OCL, ils ne seront droits qu'au cas de la géométrie euclidienne; en tout autre cas ces angles seront aigus.

Il se trouvera alors toujours dans le voisinage du point C une infinité de points jouissant de cette propriété, que le plan passant par un d'entre eux et perpendiculaire à l'axe OZ coupe CK aussi bien que CL.

Admettons qu'un tel point soit le point H de la figure 3; le plan perpendiculaire à OO coupe les lignes CK et CL aux points K_1 et L_1. Alors l'angle K_1 H L_1, qui mesure, comme l'angle AOB, l'inclinaison des plans AOC et BOC, d'après la proposition énoncée plus haut sous le n° 4, proposition admissible pour la géométrie non-euclidienne aussi bien que pour la géométrie euclidienne, est égal à l'angle AOB, et vaut un droit. Mais comme l'angle K_1 CL_1 serait aussi droit, l'on aurait sur l'hypoténuse K_1 L_1 deux triangles rectangles dont les hauteurs devraient avoir le même pied G, en vertu de la proposition citée plus haut sous le n° 3, commune aux géométries euclidienne et non-euclidienne.

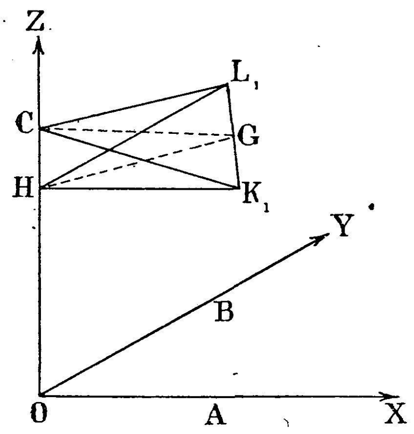

Fig. 3.

Or, le triangle CHG est rectangle, et dans ce triangle CG est plus longue que HG. Rabattons alors le triangle K_1 CL_1 sur le plan K_1 HL_1; la figure 4 montre clairement que l'angle K_1 HL_1 doit toujours être plus grand que K_1 C_1 L_1 et que par conséquent ces deux angles ne peuvent pas être en même temps droits. En acceptant une forme non-euclidienne d'espace on arrive ici à une objection qui ne peut être levée autrement que si l'on suppose droits les angles OCK et OCL, c'est-à-dire que si l'on considère les rectangloïdes comme des rectangles parfaits tels qu'ils se présentent dans la seule géométrie euclidienne ; on aurait prouvé par là la possibilité unique de cette géométrie.

On parvient au même but si l'on emploie les trois coordonnées données non en même temps, mais successivement. Déterminons dans le plan xy, au moyen des coordonnées $OA = x$, $OB = y$, le point I comme extrémité de la diagonale principale du rectangloïde OAIB, et combinons ensuite cette diagonale principale OI avec la troisième coordonnée $OC = z$ perpendiculaire au plan xy de façon à former un rectangloïde OIQC. Il est indispensable que la position du point Q soit indépendante de l'ordre dans lequel on a employé les trois coordonnées ; et pour cela il faut par conséquent parvenir au même point Q, si l'on se sert, par exemple, au lieu du rectangloïde OAIB formé par x et y, de celui OAKC formé par x et z, et dont la diagonale principale se combinerait alors avec $OB = y$. Ici également l'on démontre que l'angle KCL doit nécessairement être égal à un droit, et la conclusion à en tirer est d'accord avec celle qui vient d'être présentée ci-dessus [1].

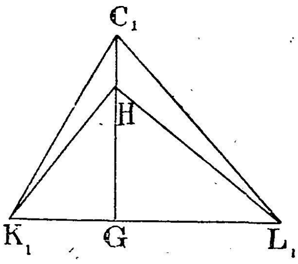

Fig. 4.

IV

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Dans le chapitre précédent, j'ai démontré d'une façon évidente l'impossibilité de chaque forme d'espace contraire aux suppositions d'Euclide. Cette démonstration, qui ne considère que des grandeurs finies, se base uniquement sur les hypothèses que le système de Bolyai et Lobatschewsky a empruntées au système de géométrie euclidienne. En partant de ceci : qu'entre tous les couples de points de l'espace il existe toujours une détermination par coordonnées réciproques, je n'ai fait que tirer les conséquences de trois hypothèses, à savoir : 1° que la structure de l'espace est partout la même ; 2° que cet espace renferme cer-

[1] Voir le développement de cette démonstration dans le travail cité : *Die Gestaltung des Raumes*, p. 26-27.