

SUR LE CALCUL DES QUATERNIONS

Autor(en): **Daniëls, Fr.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-5579>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LE CALCUL DES QUATERNIONS

Le calcul des quaternions, dont l'exposé ordinaire, tel qu'il a été donné par son inventeur Sir Rowan HAMILTON, a un caractère assez abstrait ⁽¹⁾, peut être établi d'une manière simple, en partant de certaines relations bien connues ⁽²⁾ de vecteurs qui seront d'abord rappelées dans les paragraphes 1 à 5.

1. La somme des vecteurs A, B, C, \dots ou somme géométrique possède les mêmes propriétés qu'une somme algébrique : elle est associative et commutative. En représentant par \mathcal{A} la longueur de A , par $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ les longueurs de ses composantes parallèles à trois axes rectangulaires xyz , formant un système droit (ox vers l'est, oy vers le nord, oz vers le zénith), on aura

$$(1) \quad A = \mathcal{A}_1 i + \mathcal{A}_2 j + \mathcal{A}_3 k$$

si i, j, k sont des vecteurs-unité dans les trois axes.

2. L'expression *scalaire*

$$(2) \quad \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_3 \equiv \mathcal{A} \mathcal{B} \cos (AB)$$

formée des deux vecteurs A et B , est simplement désignée par AB et nommée *produit scalaire* ou *interne* de ces deux vecteurs. Cette définition nous fournit immédiatement :

$$(3) \quad AB = BA$$

$$(4) \quad AA \equiv A^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2 = \mathcal{A}^2$$

⁽¹⁾ P.-G. TAIT dans son *Traité élémentaire des Quaternions* (I, p. 66) appelle le raisonnement de Hamilton « presque métaphysique », et O. HEAVISIDE (*Electrical Papers*, vol. II, p. 528) trouve que *the quaternion (as)... fundamental idea... renders the establishment of the algebra of vectors without metaphysics a very difficult matter.*

⁽²⁾ O. HEAVISIDE, *Electrical Papers*, vol. II, p. 528-533.

$$(5) \quad AB + AC + \dots = A(B + C + \dots)$$

$$(6) \quad (A + D)(B + C) = AB + AC + DB + DC$$

$AB = 0$ lorsque A est perpendiculaire à B ;

$$ii = jj = kk = 1; \quad ij = jk = ki = 0.$$

Le produit scalaire est donc commutatif (3) et distributif (6) comme un produit ordinaire.

3. Le vecteur

$$(7) \quad (\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 - \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2) i + (\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_3) j + (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1) k$$

formé de A et B est représenté par VAB et nommé *produit vectoriel* ou *externe* de ces deux vecteurs. Il est perpendiculaire à A , car son produit scalaire par A , formé d'après l'équation (2), est égal à zéro ; il est de même perpendiculaire à B , tandis que le carré de sa longueur, calculé d'après (4), devient :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 - \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2)^2 + (\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_3)^2 + (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1)^2 \\ & \equiv (\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2) (\mathcal{B}_1^2 + \mathcal{B}_2^2 + \mathcal{B}_3^2) - (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_3)^2 \\ & \equiv \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 - \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 \cos^2 (AB) \equiv \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 \sin^2 (AB). \end{aligned}$$

La longueur elle-même est donc $\mathcal{A} \mathcal{B} \sin(AB)$, et quant à la direction, l'on voit facilement que A , B et VAB forment un système droit, car en prenant i et j au lieu de A et B , on trouve k pour le produit vectoriel. La définition donnée par (7) nous fournit maintenant les relations suivantes :

$$(8) \quad VAB = -VBA$$

$$(9) \quad VAA = 0$$

$$(10) \quad VAB + VAC + \dots = VA(B + C + \dots)$$

$$(11) \quad V(A + D)(B + C) = VAB + VAC + VDB + VDC$$

$$(12) \quad Vij = k \quad Vjk = i \quad Vki = j$$

Le produit vectoriel est donc distributif comme un produit ordinaire (11) ; mais il n'est pas commutatif (8).

4. Le produit *scalaire* $CVAB$ des deux vecteurs C et VAB est d'après (2) et (7)

$$\mathcal{C}_1 (\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 - \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2) + \mathcal{C}_2 (\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_3) + \mathcal{C}_3 (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1)$$

ce que nous écrirons encore

$$(\cos \theta + \sin \theta \cdot VA_1) R$$

ou

$$(\cos \theta + \sin \theta \overline{A_1}) R.$$

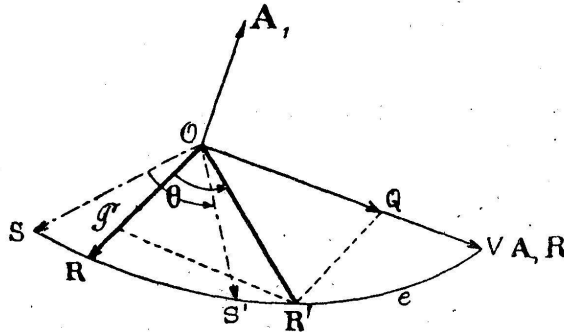


Fig. 1.

De la même manière l'on trouverait S' égal à

$$\cos \theta \cdot S + \sin \theta \cdot VA_1 S$$

ou

$$(\cos \theta + \sin \theta \overline{A_1}) S.$$

Le multiplicateur

$$\cos \theta + \sin \theta \overline{A_1}$$

change R en R' et S en S' , c'est-à-dire il tourne *tout* vecteur dans le plan e ou dans un plan parallèle d'un angle θ autour du vecteur-unité A_1 dans le sens indiqué, sans en changer la longueur. Il est évident que l'opérateur

$$m (\cos \theta + \sin \theta \overline{A_1})$$

fait, tout en tournant d'un angle θ , la longueur m fois plus grande. Cet opérateur-là est un quaternion q ;

$$\cos \theta + \sin \theta \overline{A_1}$$

en est le « verneur » Uq ; m en est le « tenseur » Tq .

Réciproquement, comme

$$\begin{aligned} (\overline{a} + \overline{A}) R &\equiv (a + \mathfrak{A} VA_1) R \equiv \sqrt{a^2 + \mathfrak{A}^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + \mathfrak{A}^2}} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{a^2 + \mathfrak{A}^2}} \overline{A_1} \right] R \\ (17) \quad &\equiv \sqrt{a^2 + \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2} (\cos \theta + \sin \theta \overline{A_1}) R \end{aligned}$$

l'opérateur $a + \bar{A}$ est un quaternion, dont le tenseur

$$Tq = \sqrt{a^2 + \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}$$

et dont le verseur

$$Uq = \cos \theta + \sin \theta \bar{A}_1,$$

l'angle θ étant déterminé par

$$\cos \theta = a : \sqrt{a^2 + \mathfrak{A}^2}$$

et

$$\sin \theta = \mathfrak{A} : \sqrt{a^2 + \mathfrak{A}^2}.$$

La « partie scalaire » Sq en est a , la « partie vectorielle¹ » Vq en est \bar{A} . Il est entièrement déterminé par les quatre quantités $a, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$; c'est de là que vient son nom.

L'égalité de deux quaternions implique aussi bien celle de leurs parties scalaires que celle de leurs parties vectorielles et réciproquement.

7. Le multiplicateur

$$m [\cos (-\theta) + \sin (-\theta) \bar{A}_1]$$

ou

$$m [\cos \theta - \sin \theta \bar{A}_1]$$

qui tourne d'un angle $-\theta$ est appelé le quaternion conjugué Kq de

$$m [\cos \theta + \sin \theta \bar{A}_1].$$

tandis que

$$\frac{1}{m} [\cos \theta - \sin \theta \bar{A}_1]$$

en est le quaternion inverse q^{-1} . Il est évident que les deux opérations q et Kq effectuées sur le vecteur R n'auront d'autre résultat que d'en faire la longueur m^2 fois plus grande :

$$Kq \cdot q = m^2 = q \cdot Kq$$

¹ Le V employé ici pour la partie vectorielle d'un quaternion est différent de celui employé pour le produit vectoriel de deux vecteurs.

tandis que les opérations q , et q^{-1} effectuées successivement ne changeront rien au vecteur :

$$q^{-1} \cdot q = 1 = q \cdot q^{-1}.$$

Il existe en outre la relation

$$Kq = (Tq)^2 q^{-1}.$$

8. *Addition.* — Les deux quaternions

$$p \equiv m_1 (\cos \theta + \sin \theta \bar{A}_1) \equiv a + \bar{A}$$

et

$$q \equiv m_2 (\cos \varphi + \sin \varphi \bar{B}_1) \equiv b + \bar{B}$$

peuvent agir sur la droite commune à leurs plans, et la figure 2 fait voir que $pR = R'$ et $qR = R''$, donc

$$pR + qR \equiv (p + q)R = R' + R'' = R''' = (q + p)R.$$

Nous en concluons d'abord, que $p + q = q + p$ et ensuite, que

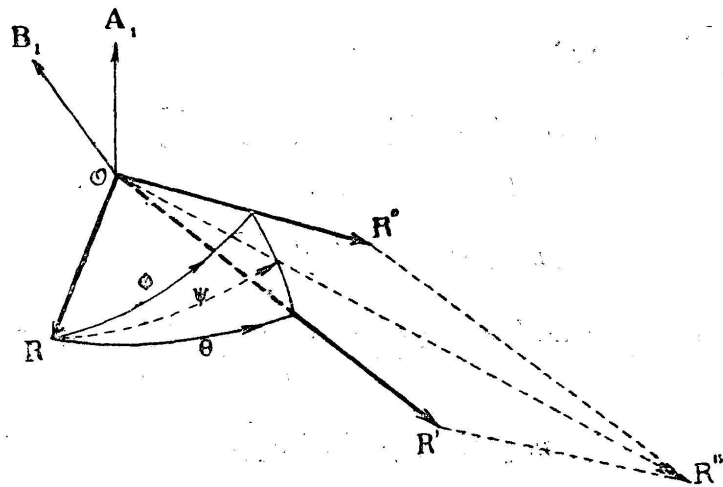


Fig. 2.

cette somme est équivalente à un nouveau quaternion, tournant d'un angle ψ tout vecteur dans le plan (RR''') . A ce nouveau quaternion peut être ajouté un troisième

$$r \equiv c + \bar{C};$$

l'ensemble sera alors équivalent à un quatrième quaternion

$$a + b + c + \overline{A + B + C},$$

et comme

$$p + q + r = r + q + p = (p + q) + r = p + (q + r)$$

l'addition des quaternions est aussi bien commutative qu'associative.

9. *Multiplication.* — Pour faire coïncider (fig. 3) le vecteur R

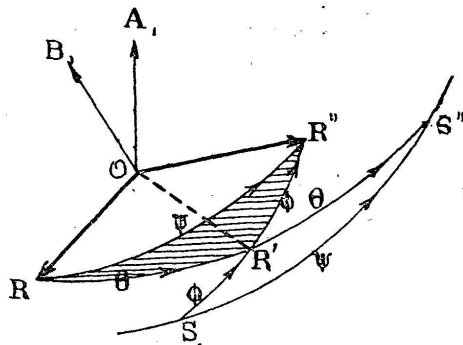


Fig. 3.

avec R'', nous pouvons d'abord lui appliquer le multiplicateur ou verseur

$$\cos \theta + \sin \theta \bar{A}_1$$

c'est-à-dire le tourner d'un angle θ autour de « l'axe » A_1 , ensuite par le verseur

$$\cos \varphi + \sin \varphi \bar{B}_1$$

le faire tourner d'un angle φ autour de B_1 , mais nous pouvons aussi directement lui appliquer le multiplicateur

$$\cos \psi + \sin \psi \bar{D}_1;$$

où D_1 est un vecteur-unité normal au plan passant par R et R'', et ψ l'angle que font entre eux ces deux vecteurs. Le « produit » des deux premiers verseurs est donc un nouveau verseur, et le produit des deux quaternions

$$p = a + \bar{A}$$

et

$$q = b + \bar{B}$$

un nouveau quaternion dont l'expression se déduit de :

$$\begin{aligned} qpR &= (b + \bar{B})(a + \bar{A})R = (b + VB)(aR + VAR) \\ &= abR + aVBR + bVAR + VBVAR. \end{aligned}$$

Les identités (16) et (15) permettent de substituer au dernier terme d'abord

$$- VAVRB - VRVBA$$

et ensuite

$$- AB.R + AR.B - VRVBA,$$

ce qui, A étant normal à R et AR zéro, se réduit à

$$- AB.R - VRVBA,$$

nous trouvons donc

$$\begin{aligned} qpR &= (ab - AB)R + aVBR + bVAR - VRVBA \\ &\equiv (ab - AB + \overline{aB + bA + VBA}) R \end{aligned}$$

et

$$(18) \quad qp = ab - AB + \overline{aB + bA + VBA}.$$

Les deux premiers termes forment la partie scalaire, les trois derniers la partie vectorielle du nouveau quaternion. A cause du dernier terme, pq n'est pas égal à qp : la multiplication n'est pas commutative, ce qui se voit d'ailleurs facilement par la figure 3. En effet, en appliquant au vecteur S successivement les opérateurs q et p , nous obtenons d'abord R' et ensuite S'' ; pq est donc équivalent à un quaternion opérant dans le plan SOS'' , qui est différent du plan ROR'' , dans lequel opère qp .

Considérons maintenant (fig. 4) trois quaternions p, q, r opérant dans les plans V_1, V_2, V_3 . Le second faisant coïncider le vecteur S avec S_1 , nous aurons

$$S_1 = qS;$$

de même

$$S_2 = pS_1$$

et conséquemment

$$S_2 = pqS.$$

Il en résulte que pq opère dans le plan V_4 , et qu'il peut faire coïncider S_4 avec S_5 , pourvu que les arcs (SS_2) et (S_4S_5) soient égaux. On aura donc aussi

$$S_5 = pqS_4,$$

ensuite

$$S_4 = rS_3$$

et enfin

$$(19) \quad S_5 = pq.rS_3.$$

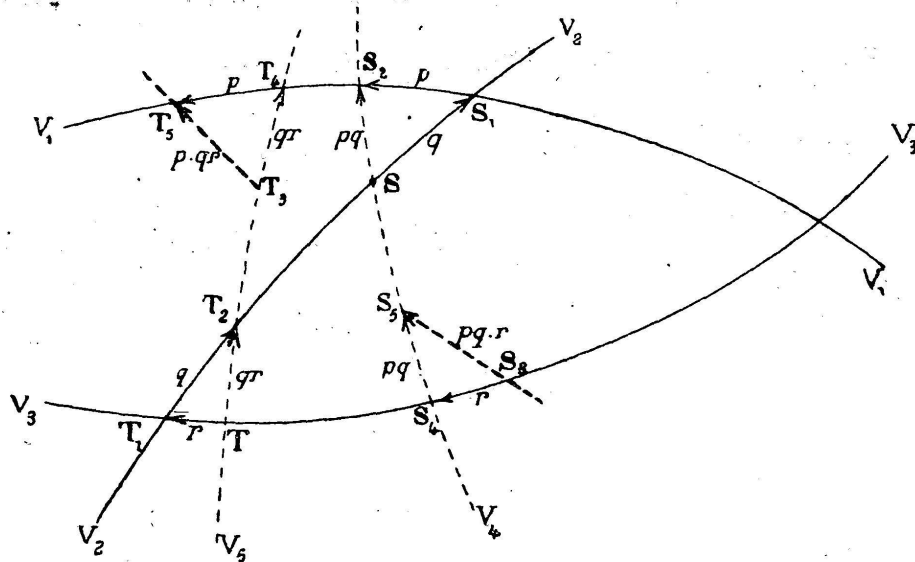


Fig. 4.

Par un raisonnement analogue, nous trouvons

$$T_1 = rT, \quad T_2 = qT_1$$

et

$$T_2 = qrT$$

donc

$$T_4 = qrT_3, \quad T_5 = pT_4$$

et enfin

$$(20) \quad T_5 = p.qrT_3.$$

Les équations (19) et (20) nous montrent que $pq.r$ et $p.qr$ sont des quaternions, qui opèrent dans les plans (S_3S_5) et (T_3T_5) , et pour que la multiplication soit associative $pq.r = p.qr$, il nous faudrait démontrer que les quatre vecteurs $S_3S_5T_3T_5$ sont dans un même plan, et que les arcs (S_3S_5) et (T_3T_5) sont égaux, ce que Hamilton fait *e. a.* en employant certaines propriétés des coniques sphériques. Mais nous pouvons aussi démontrer l'égalité des parties scalaires et celle des parties vectorielles pour les deux quaternions $pq.r$ et $p.qr$ en question.

En effet

$$S_2 = pqS = (ab - AB + \overline{aB + bA + VAB}) S$$

$$S_3 = pqS_2 = pq.rS_3 = (ab - AB + \overline{aB + bA + VAB}) (c + \bar{C}) S_3$$

ce qui, multiplié d'après (18), donne pour la partie scalaire

$$(21) \quad Spq.r = abc - (c.AB + a.BC + b.CA) - CVAB$$

tandis que la partie vectorielle

$$(ab - AB) \bar{C} + c \overline{(aB + bA + VAB)} + \overline{V(aB + bA + VAB)C}$$

dont le dernier terme est

$$- \overline{VCVAB}$$

ou (15)

$$- BC.\bar{A} + CA.\bar{B}$$

peut s'écrire

$$(22) \quad \begin{aligned} Vpq.r = & (bc - BC) \bar{A} + (ca + CA) \bar{B} + (ab - AB) \bar{C} \\ & + a\overline{VBC} - b\overline{VCA} + c\overline{VAB} \end{aligned}$$

Pour le produit $p.qr$ nous trouvons

$$T_3 = pT_2 = p.qrT_3 = (a + \bar{A}) (bc - BC + \overline{bC + cB + VBC}) T_3.$$

Les parties scalaires et vectorielles en sont les mêmes que celles de $pq.r$. D'une manière analogue, on prouve que la multiplication est distributive : $p(q + r) = pq + pr$. Un produit de quaternions n'est donc pas commutatif, mais, en dehors de cela, il possède les propriétés d'un produit ordinaire.

10. Si les composantes rectangulaires de A et B sont $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3$, l'équation (18) devient :

$$\begin{aligned} qp = & ab - \mathcal{A}_1\mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_2\mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_3\mathcal{B}_3 + [b\mathcal{A}_1 + a\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2\mathcal{A}_3 - \mathcal{B}_3\mathcal{A}_2] \bar{i} \\ & + [b\mathcal{A}_2 + a\mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3\mathcal{A}_1 - \mathcal{B}_1\mathcal{A}_3] \bar{j} + [b\mathcal{A}_3 + a\mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_1\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_2\mathcal{A}_1] \bar{k} \end{aligned}$$

La formule du produit (18) nous permet de démontrer quelques relations importantes :

a)

$$Kqp = Kp.Kq.$$

et généralement

$$Kp_1 p_2 \dots p_n = Kp_n Kp_{n-1} \dots Kp_1.$$

En effet, en changeant (§ 6) le signe de la partie vectorielle, (18) nous donne

$$Kqp = ab - AB - a\bar{B} - b\bar{A} - \overline{VBA};$$

tandis que

$$Kp.Kq = (a - \bar{A})(b - \bar{B}) \equiv ab - AB - \bar{a}\bar{B} - \bar{b}\bar{A} + \overline{VAB}.$$

Nous avons donc

$$Kqp = Kp.Kq$$

et de même

$$\begin{aligned} Kq_1 q_2 \dots q_n &= K(q_2 \dots q_n).Kq_1 = K(q_3 q_4 \dots q_n).Kq_2.Kq_1 \\ &= \dots = Kq_n.Kq_{n-1}.Kq_{n-2} \dots Kq_1 \end{aligned}$$

b) $Sqp = Spq$

et en général

$$Sq_1 q_2 \dots q_l q_{l+1} \dots q_n = Sq_{l+1} \dots q_n q_1 \dots q_l$$

car, comme la partie scalaire en (18) ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des quaternions, nous avons d'abord $Sqp = Spq$ et ensuite, pourvu qu'on garde le même ordre cyclique

$$\begin{aligned} Sq_1 q_2 \dots q_n &= S(q_1 \dots q_l)(q_{l+1} \dots q_n) = S(q_{l+1} \dots q_n)(q_1 \dots q_l) \\ &= Sq_{l+1} q_{l+2} \dots q_n q_1 q_2 \dots q_l. \end{aligned}$$

c) Lorsque $p = m(\cos \theta + \sin \theta \bar{A}_1)$ l'équation (18) donne

$$pp \equiv p^2 = m^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \bar{A}_1) \equiv m^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta \bar{A}_1)$$

et généralement, quand r est un nombre entier positif

$$p^r = m^r(\cos r\theta + \sin r\theta \bar{A}_1)$$

Il en résulte

$$\left(\cos \frac{\pi}{2m} + \sin \frac{\pi}{2m} \bar{A}_1\right)^m = \bar{A}_1.$$

ce qui conduit tout naturellement à la convention

$$\cos \frac{\pi}{2m} + \sin \frac{\pi}{2m} \bar{A}_1 \equiv \bar{A}_1^{\frac{1}{m}}$$

et

$$\cos \frac{n}{m} \cdot \frac{\pi}{2} + \sin \frac{n}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \bar{A}_1 = \bar{A}_1^{\frac{n}{m}}$$

Cette dernière formule permet d'identifier un verseur quelconque à une puissance de son vecteur-unité.

11. *Division.* — Comme $q(q^{-1}p)$ ou $(qq^{-1})p$ est équivalent au quaternion p , il est tout naturel d'appeler $q^{-1}p$ le quotient de p par q , pour lequel on pourra encore écrire $\frac{p}{q}$, pourvu qu'on se rappelle constamment que cette fraction est $q^{-1}p$ et non pas pq^{-1} . Sa valeur (§ 7) est

$$q^{-1}p \doteq \frac{1}{b^2 + \beta^2} (b - \bar{B})(a - \bar{A}) \doteq \frac{1}{b^2 + \beta^2} (ab + AB + \overline{bA - aB - VBA})$$

Il est maintenant facile d'interpréter une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières des quaternions p, q, r, \dots

12. *Vecteurs. Quaternions élémentaires.* — Un quaternion se réduit à un vecteur \bar{A} (quaternion élémentaire), quand sa partie scalaire est zéro, c'est-à-dire quand son angle est droit. Les règles trouvées pour les quaternions s'appliquent encore à ces vecteurs. Nous allons nous conformer, dans la suite, à la notation la plus répandue des quaternionistes qui représentent $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ par $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ leurs tenseurs par $T\alpha, T\beta, \dots$, les vecteurs-unité $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ par i, j, k , AB par $T\alpha T\beta \cos \vartheta$, etc; mais il sera bon de rappeler que $\bar{A} \equiv \alpha$ est autre chose que A . Les équations que nous allons trouver sont des égalités de quaternions, dont chacune est équivalente, en général, à quatre équations entre scalaires.

a) Ce qui a été trouvé pour l'addition des quaternions permet de conclure, que la somme des vecteurs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ est un nouveau vecteur, qu'on trouve en les composant comme des forces données; cette somme est associative et commutative.

b) Pour les produits de deux vecteurs α et β , qui font entre eux l'angle θ , l'équation (18) nous donne

$$(23) \quad \alpha\beta = -AB + \overline{VAB} \quad \beta\alpha = -AB + \overline{VBA}$$

Leurs scalaires sont égales :

$$(24) \quad S\alpha\beta = S\beta\alpha$$

avec la valeur commune $-T\alpha \cdot T\beta \cdot \cos \theta$. Leurs parties vectorielles diffèrent par le signe :

$$(25) \quad V\alpha\beta = -V\beta\alpha$$

le premier membre de (25) est $T\alpha T\beta \sin \theta \cdot i'$, si i' est un vecteur-unité perpendiculaire à α et β , tel que α, β, i' forment un système droit. On a évidemment encore

$$(26) \quad \alpha\beta + \beta\alpha = 2S\alpha\beta$$

et

$$(27) \quad \alpha\beta - \beta\alpha = 2V\alpha\beta.$$

La partie scalaire $S\alpha\beta = 0$, lorsque α est perpendiculaire à β ; la partie vectorielle $V\alpha\beta = 0$, lorsque α est parallèle à β .

c) Pour le carré d'un vecteur, les équations (23) fournissent : $\alpha^2 = -(T\alpha)^2$; donc, pour le carré d'un vecteur-unité, quel qu'il soit -1 . Il est donc $i^2 = -1$; $i^3 \equiv i^2 \cdot i = -i$, etc.

d) Pour le produit $\alpha\beta\gamma$ de trois vecteurs, l'on trouve d'après (21) et (22)

$$S\alpha\beta\gamma = -CVAB$$

et

$$V\alpha\beta\gamma = -BC \cdot \bar{A} + CA \cdot \bar{B} - AB \cdot \bar{C}$$

Il en résulte

$$(28) \quad S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta$$

et

$$(29) \quad V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta.$$

Le premier membre de la dernière équation peut s'écrire

$$V\alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma)$$

ou

$$\alpha.S\beta\gamma + V\alpha V\beta\gamma,$$

de sorte que

$$(30) \quad V\alpha V\beta\gamma = -\beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta$$

ce qui, lorsqu'on y substitue le vecteur $V\delta\varepsilon$ au lieu de α , nous montre que

$$(31) \quad VV\delta\varepsilon V\beta\gamma = -\beta S\gamma(\delta\varepsilon - S\delta\varepsilon) + \gamma S(\delta\varepsilon - S\delta\varepsilon)\beta = -\beta S\gamma\delta\varepsilon + \gamma S\delta\varepsilon\beta$$

e) Enfin, nous avons d'après (§ 10, a) et (§ 7)

$$K\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n = K\alpha_n K\alpha_{n-1} \dots K_2 K_1$$

ou

$$K\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n = (-1)^n \alpha_n\alpha_{n-1} \dots \alpha_1\alpha_2$$

ce qui peut s'écrire

$$S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n - V\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n = (-1)^n [S\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1 + V\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1]$$

Il en résulte les deux équations :

$$(32) \quad S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n = (-1)^n S\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$$

et

$$(33) \quad V\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n = (-1)^{n-1} V\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$$

dont (24) et (25) ne sont que des cas spéciaux.

Les équations (24 — 33) suffisent pour les nombreuses applications du calcul des quaternions.

M. FR. DANIELS, Fribourg (Suisse).