

# CORRESPONDANCE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(modèles pour la représentation dans l'espace des lignes de force et des lignes d'égal potentiel électrique), SCHÜLKE (modèles pour la construction de ponts et de charpentes de toitures) et SCHLICK (modèles relatifs au problème des masses dans les constructions navales). La plupart de ces modèles se trouveront dans le commerce; ils seront édités par la maison Martin Schilling à Halle.

Les mathématiciens allemands ont reconnu depuis longtemps la haute valeur pédagogique des modèles dans l'enseignement des mathématiques pures et appliquées. Chacun connaît, ne serait-ce que par le catalogue de M. W. Dyck, la belle collection de modèles et instruments exposée à Munich, en 1892, à l'occasion du congrès des mathématiciens allemands. Nous sommes certains que si une pareille exposition est organisée pour le prochain Congrès international des mathématiciens qui doit avoir lieu en Allemagne en 1904, elle obtiendra un grand succès.

### Congrès international d'Histoire des Sciences.

Le Congrès international des sciences historiques qui devait avoir lieu à Rome, en avril 1902, a été renvoyé à l'année prochaine.

---

## CORRESPONDANCE

---

### Remarque au sujet de la notion de nombre dans son développement historique.

Stockholm, février 1902.

Monsieur H. Fehr,

J'ai lu avec intérêt votre article sur les extensions de la notion de nombre (*L'Enseignement Mathématique*, IV, p. 16 à 27), et je me permets de vous adresser quelques petites remarques au sujet des indications historiques.

P. 24. — L'indication que les nombres négatifs furent employés par Descartes d'une « façon systématique dans les calculs », doit sans doute être un peu modifiée. Il est vrai que Descartes porte son attention sur les racines négatives des équations, mais, en outre, il ne s'occupe pas beaucoup des nombres négatifs.

L'attribution <sup>(1)</sup> à Descartes du premier emploi d'une même lettre

---

(1) Voir p. ex. : *Encykl. der math. Wiss.* I, p. 12, note 18.

pour désigner une quantité positive ou négative semble dépendre d'un malentendu.

P. 24. — Les fractions dont le numérateur est l'unité sont appelées ordinairement « fractions fondamentales », parfois « quantèmes ».

P. 25. — A propos de la notion du nombre irrationnel, il convient de faire que, pour les *géomètres grecs*, cette notion contenait une *contradiction*. Les Grecs s'occupèrent de *quantités* irrationnelles, tandis que tous les nombres étaient nécessairement compris dans les *quantités rationnelles*.

P. 25. — On peut faire observer que la transformation de

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}$$

en une somme de deux racines carrées se trouve déjà dans Euclide. En effet, la proposition X, 54 des *Elementa* contient le théorème :

$$m + \sqrt{m^2 - n^2} = \left( \sqrt{\frac{m+n}{2}} + \sqrt{\frac{m-n}{2}} \right)^2$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule pour

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}$$

en posant

$$a = m \quad b = m^2 - n^2,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{a^2 - b} = n$$

P. 26. — Roger Cotes († 1716) a découvert la formule

$$\log (\cos x + i \sin x) = ix$$

qui est essentiellement identique à la formule

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(Voir, *Bibliotheca Mathem*, 2, 1901, p. 442.)

P. 26. — M. A. Pringsheim (*Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und  $\pi$* ; Ber. der Akad. der Wiss. in München, t. XXVIII, 1898, p. 325-337) a fait voir : 1° que Lambert a démontré *complètement et rigoureusement* l'irrationalité de  $\pi$ ; 2° que Legendre n'a qu'abrégé la démonstration de Lambert. D'autre part, le procédé de Legendre permet de démontrer aussi l'irrationalité de  $\pi^2$ .

G. ENESTRÖM.

### Les différents modes de mesure des angles.

Dans la plupart des traités de Trigonométrie il manque un chapitre spécial sur les différents modes de mesure des angles ; c'est cependant une question des plus importantes, surtout pour la pratique.

Comme unité de mesure on prend ordinairement le *degré*. Dans ce sens, un degré est un angle, mais on peut aussi le considérer comme un arc  $\left(\frac{1}{360}$  de la circonférence) et on a la longueur du degré si on connaît le rayon.

Au lieu du degré, on emploie aussi le *grade*, qui se prête aux mêmes observations, mais dont les sous-divisions sont décimales. C'est le  $\frac{1}{400}$  de la circonférence.

Cette unité fut proposée lors de la création du système métrique. Elle offre de grands avantages, et il importe de savoir convertir en grades les degrés, minutes et secondes, et réciproquement.

Les progrès de nos instruments actuels, dans les observations, permettent d'évaluer des angles d'une seconde, alors que Tycho-Brahé, avec son quart de cercle, de dimension beaucoup plus grande, n'arrivait guère qu'au demi-degré.

Lorsqu'il s'agit de calculs trigonométriques, il est plus avantageux, au lieu du degré ou du grade, de prendre une unité empruntée à la nature même du cercle. Celle qu'on a adoptée est le *radian*, arc dont la longueur est égale à celle du rayon. Dans ce système, un angle droit a pour mesure  $\frac{\pi}{2}$ , et on a la correspondance que voici entre radians et degrés

R	D
$2 \pi$	360
$\frac{\pi}{2}$	90
1	57 17' 44",8 ou 206 264",8

L'usage du radian, ou unité trigonométrique, s'impose parfois avec un caractère d'urgence.

Si R est le rayon d'un cercle, la longueur d'un arc est  $\alpha R$ , si l'angle correspondant est mesuré en radian, pour le nombre  $\alpha$ , et  $\frac{q}{360} \times 2\pi R$ , si cet angle est mesuré en degrés par le nombre  $q$ .

L'avantage saute aux yeux ; on en trouverait un pareil dans la comparaison des formules, donnant une vitesse angulaire.

En planimétrie on démontre que le rapport de l'arc de cercle à sa corde a pour limite l'unité quand la corde diminue indéfiniment ; et



ainsi la corde, pour de très petits arcs, diffère si peu de l'arc qu'on peut négliger la différence et dire que la corde est égale à l'arc. D'où il suit, sous une autre forme, qu'on a les équations connues :

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim \frac{\text{tang } x}{x} = 1,$$

$$\lim \cos x = 0,$$

$$\text{pour } \lim x = 0.$$

Mais elles n'existent que si l'angle  $x$  est mesuré au moyen de l'unité trigonométrique.

Si l'on remplace  $\sin x$  par  $n$ , quand l'angle est égal à  $1''$ , on obtient

$$n = \frac{1}{206\,265} R.$$

Quand l'angle d'une seconde sous-tend un arc de longueur 1, le rayon de son cercle est de 206 265 unités. Par conséquent pour voir le décimètre sous un angle d'une seconde, on doit s'éloigner de 206 265 décimètres ou plus de 20 kilomètres ; pour une minute, l'éloignement est de 350 mètres, et pour un degré de 6 mètres à peu près.

Remarquons que

$$\sin 1'' = \frac{1}{206\,265}$$

d'où l'on tire

$$\log \sin 1'' = 4,68557 - 10.$$

Donc, pour trouver approximativement le logarithme d'une fonction goniométrique d'un petit angle on pourra, par exemple, écrire

$$\sin 1^{\circ} 15' = \sin 4\,500'' = 4\,500 \sin 1''$$

ou

$$\begin{aligned} \log \sin 1^{\circ} 15' &= \log 4\,500 + \log \sin 1'' = \\ &= 3,65321 + 4,68557 - 10 = \\ &= 8,33878 - 10 \end{aligned}$$

tandis que rigoureusement le nombre doit être

$$\log \sin 1^{\circ} 15' = 8,33875 - 10.$$

Quand on sait, que les parallaxes des étoiles fixes qui ont été déter-

minées, sont comprises entre  $0'',2$  et  $2''$ , on en conclut facilement que les étoiles fixes sont 1 000 000 à 100 000 fois plus loin de nous que le soleil. Pour la constante de l'aberration, on trouve également  $20''$ , parce que le rapport entre la vitesse de la lumière (300 000 kilomètres) et la vitesse de la terre autour du soleil (30 kilomètres) est à peu près 10 000. Toujours quand on veut mesurer un petit angle, comme le champ de vision d'un télescope, des cercles gradués, etc., on doit faire usage de cette formule :

Inversement quand il est question de petites quantités, on peut exprimer une longueur en mesure d'angle. Le théorème de Kepler

$$\mathcal{K} = \mathcal{E} - e \sin \mathcal{E},$$

où  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  sont mesurés en degrés et où  $e$  est très petit, peut se formuler encore ainsi :

$$\mathcal{K} = \mathcal{E} - \frac{e}{\sin 1''} \sin \mathcal{E}.$$

J.-C. BOLT (Rotterdam).

### Remarque sur la cycloïde.

1. La cycloïde peut être engendrée par le mouvement composé d'un point qui se meut sur une circonférence, pendant que celle-ci glisse sur une droite, si l'on suppose que les espaces parcourus par le point mobile du cercle et par le point de contact avec la droite sont égaux. C'est, comme on sait, sur ce mode de génération que l'on s'appuie, pour montrer par la méthode de Roberval que la normale à la cycloïde passe par le point de contact correspondant.

Ce mode de génération peut aussi être présenté d'une manière légèrement différente, comme il suit :

La cycloïde est engendrée par le sommet C ou D, d'un parallélogramme *articulé* dont le côté AB glisse sur l'axe  $ox$ , pendant que les côtés AC et BB tournent autour des points mobiles A et B respectivement, l'espace parcouru par AB étant égale à l'arc décrit par C ou D.

En effet, comme tous les points du côté CD décrivent alors évidemment la même courbe (en des positions différentes), l'on peut, au lieu du parallélogramme, considérer seulement une droite AC dont le point A glisse sur l'axe des  $x$  et qui en même temps tourne autour de A. Comme le point C décrit alors, pour un observateur entraîné par le mouvement de A, un arc de cercle, et que ce cercle (si on le décrit) glisse sur une droite parallèle à  $ox$  à distance AC, il est évident que tout revient au mouvement composé cité au commencement. M. Schilling a donné dans cette *Revue* (II, p. 31 et suiv.) des propositions sur

les courbes *cycloïdales*, dont celle ci-dessus indiquée n'est qu'un cas spécial (une des deux rotations des côtés  $SE_1$ ,  $SE_2$  du parallélogramme s'est réduite à une translation); mais, comme il n'insiste pas sur ce cas, je voudrais donner ici la démonstration élémentaire directe de ce mode de génération de la cycloïde, que j'ai donnée à l'École Militaire.

2. Les coordonnées de l'extrémité C sont, si l'on prend pour axe des  $y$  la droite sur laquelle se trouve AC, quand elle est perpendiculaire à l'axe  $O'x$ , les suivantes :

$$(1) \quad x = a \sin \theta + \varphi(\theta), \quad y = a \cos \theta,$$

où  $\theta = \widehat{yO'C}$ ,  $a = AC$  et  $\varphi(\theta)$  est l'espace parcouru par le point A. D'autre part, les équations de la cycloïde :

$$x = a(\omega - \sin \omega), \quad y = a(1 - \cos \omega)$$

transportées aux axes  $o'x$ ,  $o'y$  seront (coord. de  $O' : a\pi, a$ ) :

$$x = a\omega - a \sin \omega - a\pi, \quad y = a(1 - \cos a\omega) - a = -\cos \omega,$$

mais

$$\omega = \theta + \pi, \quad \text{donc } \sin \omega = -\sin \theta, \quad \cos \omega = -\cos \theta,$$

d'où

$$\begin{cases} x = a\theta + a\pi + a \sin \theta - a\pi = a\theta + a \sin \theta, \\ y = a \cos \theta, \end{cases}$$

et en supposant  $\varphi(\theta) = a(\theta)$ , l'on a bien la courbe (1).

C. q. f. d.

3. En partant de l'autre mode de génération : du mouvement d'un point sur le cercle glissant, on démontre que la courbe est une cycloïde, comme il suit :

Les coordonnées relatives de M (axes parallèles à ceux de la cycloïde, par le centre du cercle dans une position quelconque) sont

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta \quad (\theta = x \widehat{O'M})$$

D'autre part, on a

$$X = x + a\omega, \quad Y = y + a$$

d'où

$$X = a(\omega + \cos \theta), \quad Y = a(1 + \sin \theta),$$

et comme

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - \omega, \quad \cos \theta = -\sin \omega, \quad \sin \theta = -\cos \omega,$$

l'on aura

$$X = a(\omega - \sin \omega), \quad Y = a(1 + \cos \omega).$$

C. q. f. d.

N.-J. HATZIDAKIS (Athènes).

### Sur la formule de Binet.

La formule de Binet

$$F = \frac{c^2}{\rho^2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} \right)$$

se trouve ordinairement démontrée dans les Traités soit *indirectement* (c'est-à-dire *après* avoir trouvé la formule

$$v^2 = c^2 \left[ \frac{1}{\rho^2} + \left( \frac{d \frac{1}{\rho}}{d\theta} \right)^2 \right]$$

que l'on différentie), soit en égalant à zéro la composante de l'accélération suivant la perpendiculaire au rayon vecteur; cela est direct, mais assez long, parce qu'il faut trouver d'abord les deux composantes de l'accélération. Le moyen suivant est direct et assez court : on a

$$\frac{X}{x} = - \frac{D}{\rho},$$

ou

$$\frac{x''}{x} = - \frac{F}{\rho},$$

ou encore

$$\frac{x''}{\cos \theta} = - F.$$

Calculons  $x''$  et ayons égard à la relation

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{c}{\rho^2} : x' = \rho' \cos \theta - \rho \sin \theta \cdot \theta' = \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta \frac{c}{\rho^2} - \rho \sin \theta \frac{c}{\rho^2} \\ &= -c \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\theta} \cos \theta - c \frac{\sin \theta}{\rho}; \quad x'' = +c \sin \theta \frac{c}{\rho^2} - \cos \theta \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\theta^2} \frac{c}{\rho^2} \\ &\quad - \frac{c}{\rho} \cos \theta \frac{c}{\rho^2} - c \sin \theta \frac{c}{\rho^2} = - \frac{c^2}{\rho^2} \cos \theta \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\theta^2} \right], \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant :

$$F = \frac{c^2}{\rho^2} \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{d^2 \left( \frac{1}{\rho} \right)}{d\theta^2} \right]. \quad \text{c. q. f. d.}$$

On peut évidemment aussi partir de la formule

$$\frac{-Y}{y} = -\frac{D}{\rho}.$$

N.-I. HATZIDAKIS (Athènes).

### A propos de la note de M. Berdellé : Sur une question de terminologie.

M. Berdellé propose (E. M., 15 nov. 1901), pour les Allemands, les termes : *aequivalent*, *Aequivalenz*, ou bien *wertgleich* (*gleichgeltend*), *Wertgleichheit* (*Gleichgeltung*), pour la traduction du sens *équivalent* (*figures équivalentes*) en français. Les mots les plus convenables et qui du reste sont déjà en usage (Voir D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, p. 40) sont : *Flächengleich* (*Flächengleichheit*), ou bien *inhaltsgleich* (*Inhaltsgleichheit*). (M. Hilbert y considère *flächengleich* « comme un peu plus étroit que *inhaltsgleich* », mais c'est une nuance de différence dont il n'est pas question ici).

N.-I. HATZIDAKIS (Athènes).

### Sur une simplification de démonstration.

On trouve, au Livre II de tous les Traités de Géométrie, les propriétés suivantes : 1° la droite de Simson d'un point M du cercle circonscrit à un triangle ABC, dont l'orthocentre est H, passe par le milieu du segment MH ; 2° les cercles circonscrits aux quatre triangles résultant des quatre droites données ont un point commun P, qui a même droite de Simson *p* par rapport aux quatre triangles.

Mais une autre propriété importante du quadrilatère est celle-ci : *Les orthocentres des quatre triangles sont en ligne droite*. Cette propriété est toujours rejetée au Livre III, et même fort loin dans le Livre III. Catalan, dans ses Théorèmes et Problèmes de géométrie élémentaire, en donne une démonstration compliquée, qui exige la connaissance des propriétés du quadrilatère complet, des axes radicaux, etc. MM. Rouché et de Comberousse, dans leur Traité, en font l'objet du dernier (n° 372) de tous les exercices proposés, non sur le Livre III lui-même, mais sur

son Appendice non exigé par les programmes. Cette place indique suffisamment que la proposition n'est pas regardée par les auteurs comme étant de démonstration facile.

Cependant, puisque c'est au Livre II que l'on a parlé des propriétés (1° et 2°) rappelées ci-dessus, il est clair que c'est au Livre II, et non à la fin du Livre III, que l'on doit dire, comme corollaire immédiat : *Les orthocentres des quatre triangles sont sur la parallèle à p, dont la distance à p est égale à celle de P à p.*

C'est donc un théorème ou exercice à déplacer et une démonstration à simplifier.

Votre bien dévoué,

L. RIPERT (Poix, Somme).

### Problème remarquable de la règle de société.

Deux bergers voulaient goûter ensemble dans la campagne ; l'un avait cinq petits fromages de lait de chèvre, l'autre en avait trois. Un troisième homme qui les vit de la route arriva vers eux : Permettez-moi, pour de l'argent et de bonnes paroles, de prendre part à votre repas. » A eux trois ils mangèrent donc leurs parts égales de cinq et trois, cela fait huit petits fromages. Sur cela le troisième homme remercia les deux bergers et leur donna huit doublons.

L'un voulut, d'après le nombre de leurs fromages, en garder cinq et en donner trois à l'autre. L'autre dit : « Ah ! c'est comme ça que tu arranges les affaires ! Le monsieur nous a donné l'argent à tous les deux : ainsi il y a quatre pièces pour toi et quatre pour moi. Quant à ce que tes cinq fromages valaient de plus que les miens, je veux bien te le solder ! »

Comme ils ne parvinrent pas à s'entendre, ils portèrent leur différent devant le juge. Le bienveillant lecteur se demande : « auquel des deux le juge a-t-il donné raison ? » Réponse : « A aucun des deux. » Car il dit : « D'après ce que vous venez de m'exposer tous les deux, le premier d'entre vous aura sept doublons et l'autre une, et cela d'après le droit ! J'ai dit ! »

On ne croirait pas que ce verdict soit juste ; mais il n'y a pas moyen de se tromper, car si on partage chaque petit fromage en trois parts égales, autant qu'il y avait de personnes, les 5 chevrets du premier donnèrent 15 parts, les 3 de l'autre 9, en tout 24 parts, 8 pour chacun d'eux. Donc le troisième homme eut 7 parts des 15 du premier, car 8 de 15, reste 7. Des 9 parts de l'autre il n'en eut qu'une. 7 et 1 font 8. Ainsi d'après les règles du droit le premier devait avoir 7 doublons et le second seulement un.

Le lecteur bienveillant est prié d'en conclure :

*Primo*, comment on peut croire souvent qu'un verdict est injuste, parce qu'on ne se rend soi-même pas compte de ce qui est juste.

*Secundo*, combien il est dangereux de commencer un procès, même quand on croit avoir pour soi le droit le plus évident.

(Traduit de l'allemand, par Ch. Berdellé).

HEBEL (<sup>1</sup>).

NOTE DU TRADUCTEUR. — Dans le titre qu'il donne à son anecdote, Hebel nous la présente comme un *exemple remarquable de la Regula Societatis*; il semble donc qu'il aurait dû, contrairement au verdict du juge, soutenir la solution du premier berger; et cela d'autant plus qu'il n'arrive pas souvent à un juge d'allouer à un plaideur plus qu'il n'a demandé lui-même. Quant à nous, notre sentiment donnait d'instinct raison au second berger. En favorisant tant le premier aux dépens de celui-ci, Hebel prouve presque le contraire de la morale qu'il prétend donner à son conte; car nous y voyons qu'il peut arriver qu'un juge à l'esprit faux vous alloue plus qu'il ne vous est légitimement dû, plus que vous n'en demandez vous-même.

Dans *Mathématique et Mathématiciens* de Rebière on peut lire sur une page : *Nous devons plutôt nous fier au calcul algébrique qu'à notre jugement* (EULER) et sur la page suivante : *Le bon sens ne perd jamais ses droits : opposer à l'évidence une formule démontrée, c'est à peu près comme si, pour refuser à un homme le droit de vivre, on alléguait devant lui un acte de décès authentique* (J. BERTRAND). Or le conte ci-dessus semble imaginé exprès pour montrer combien Bertrand a raison contre Euler.

Un doublon est une ancienne pièce espagnole, répandue jadis dans l'Europe centrale et valant, à quelques sous près, notre pièce de 20 francs. Un des fromages en question pouvait bien valoir un gros batz, pièce de 6 kreutzer, monnaie du pays où l'histoire est censée s'être passée, et à l'époque où elle fut publiée. Or la valeur de ce batz est à peu près de 20 centimes.

Maintenant, discutons d'abord les prétentions des deux bergers dans des cas différents de ceux du procès.

Supposons d'abord qu'au lieu de donner 8 doublons ce monsieur n'ait donné que la valeur des 8 fromages, c'est-à-dire 8 batz.

---

(<sup>1</sup>) Jean-Pierre Hebel (1760-1826) était fils d'un tisserand de Hausen (Oberland Badois). Pasteur réformé, il parvint à la dignité de prélat, créée pour le faire entrer dans la Chambre haute du pays de Bade. Ami des mœurs et du langage populaire de son pays, il fut surtout célèbre par ses poésies allemaniques. De 1807 à 1819 il rédigea l'Almanach Badois sous le titre *L'Ami de la Maison rhénan*, et en republia plus tard les articles sous le nom de *Schatzkästlein* (*L'Ecrin*).

C'est de l'un de ses volumes, le troisième, qu'est tirée l'anecdote ci-dessus.



Dans ce cas les bergers n'auraient pas porté l'affaire devant le juge : leurs deux solutions se seraient confondues.

En effet le premier aurait gardé 5 batz et donné 3 à l'autre. Le second aurait donné 4 batz et en aurait gardé 4, mais pour solder la différence de leurs mises en fromages, il aurait rendu 1 de ces batz.

Les choses se seraient passées comme si le monsieur avait acheté les 8 fromages et régala les bergers.

*Deuxième cas.* Le monsieur ne paye que ce qu'il a mangé, c'est-à-dire il ne donne ni 8 doublons, ni même 8 batz valant 48 kreutzer ; il ne donne que 16 kreutzer. Dans ce cas, l'affaire ne viendrait pas devant le juge, car ne recevant que la valeur de ce qu'ils ont fourni ils partageront naturellement au prorata de ce que chacun a fourni, prenant l'un 14 kreutzer, l'autre 2, comme le juge l'aurait ordonné.

*Troisième cas.* Le monsieur donne 8 doublons.

Alors la disproportion entre la valeur de la chose fournie et le prix dont le monsieur l'a payée montre qu'il a moins voulu payer sa consommation que reconnaître l'hospitalité empressée avec laquelle les deux bergers l'ont admis à leur frugal repas ; et comme l'intention du donateur doit faire loi, il semble que c'est le berger que le verdict du juge a lésé, qui était le plus dans le vrai. Je comprends qu'on admette la solution du premier comme cote mal taillée entre le *bon sens* dont parle J. Bertrand et la *formule algébrique* d'Euler. Si les bergers m'avaient pris pour conciliateur, j'aurais tout au plus coupé leur différent en deux, allouant à l'un quatre doublons et demi et à l'autre trois doublons et demi, mais il aurait été plus juste de donner au berger des trois fromages les quatre doublons demandés, en le dispensant même de rembourser la différence de valeur des fromages, pour punir le premier d'avoir fait le procès. Pour se montrer moins malveillant contre le premier berger, on peut encore admettre la solution suivante : lui faire rendre par le second, non le prix d'un fromage, mais celui de deux, puis partager les doublons également. Cette solution aurait le mérite de mieux faire sentir au premier la justice de ce verdict, en mettant, pour ainsi dire, les deux plaideurs à la place l'un de l'autre ; en outre elle lui laisse tout le bénéfice qu'il peut demander pour sa différence de mise, puisqu'elle la lui double.

Ainsi voici un problème d'arithmétique qui, au lieu d'une solution, en offre autant qu'on voudra bien en imaginer, et ce n'est pas étonnant, parce qu'il renferme des éléments non mathématiquement appréciables, et que c'est en même temps un problème de droit. Si je connaissais des membres d'une conférence d'avocats, je leur soumettrais la question.

Le professeur de la rhétorique scientifique d'un lycée pourrait y trouver, ce me semble, un sujet de discours sortant un peu de l'ordinaire classique, en distribuant aux élèves de sa classe les rôles d'avocats des deux parties, de ministère public, de juge prononçant un verdict motivé, de rédacteurs de journaux de droit (ou de mathématiques) ren-



dant compte du procès, et fournissant chacun une nouvelle solution conforme à sa propre manière de sentir.

Avant de terminer cet article, proposons un autre dénouement à l'histoire, en supposant que le juge a lu les fables de Lafontaine.

Il fait donc déposer les huit doublons ; il fait convertir l'un d'eux en menue monnaie, paye là-dessus à chaque berger le double de la valeur de ses fromages, donne le reste de la menue monnaie à partager aux huissiers, greffiers et avocats, et puis... empoche majestueusement les sept autres doublons.

Nouveau problème à résoudre alors, purement mathématique celui-là, et nous donnant d'une façon bien plus réelle la leçon de morale que Hebel a voulu mettre dans son conte :

« Combien chacun des plaideurs aurait-il gagné à admettre la solution de son adversaire ? »

Ch. BERDELLÉ.

#### A propos des nouveaux « *Éléments de Géométrie* » de M. Méray.

Lille, le 16 décembre 1901.

Monsieur le Rédacteur,

L'exhumation des *Nouveaux Éléments de Géométrie* de M. Ch. MÉRAY, qui a fait de votre part l'objet d'un intéressant article, me suggère l'idée de vous signaler deux tombes modestes où furent enterrés deux enseignements jadis bien vivants et singulièrement séduisants.

En 1866, à l'occasion de la création par DURUY de l'enseignement secondaire spécial, furent rédigés des programmes officiels fort détaillés et pleins d'intérêt. De jolis petits livres, publiés presque aussitôt par M. SAINT-LOUP, professeur à la faculté de Strasbourg, serrèrent ces programmes de si près qu'on serait tenté de croire que l'auteur fut aussi le rédacteur des programmes. Plus désireux de montrer les vérités géométriques que de les démontrer, M. Saint-Loup fait un appel judicieux aux données expérimentales, et il serait aujourd'hui, à mon sens, un excellent guide pour les élèves des classes de lettres désireux de comprendre la Géométrie avant de l'apprendre. Mais ces ouvrages sont devenus introuvables.

A la même époque, en 1867, J. CAQUÉ fut chargé, à l'École nationale et spéciale des Beaux-Arts, d'enseigner, entre autre choses, la Géométrie élémentaire, fonction qu'il garda jusqu'en 1883 ; libre de son programme et désireux de donner à ses élèves des démonstrations d'une grande simplicité, il adopta, comme il dit modestement, une méthode d'exposition sensiblement différente de celle que l'on suit habituellement. Cet excellent professeur divisait son cours en trois parties, menant de front l'étude du plan et celle de l'espace :

1° Propriétés résultant de la superposition des figures ;

- 2° Propriétés déduites de la théorie des lignes proportionnelles ;  
 3° Mesure des grandeurs géométriques (angles, surfaces et volumes).

Chaque partie est développée logiquement, d'une manière très liée, avec peu d'appels à l'expérience. Il s'y rencontre des analogies avec les vues de M. Méray. On trouverait sans doute au secrétariat de l'École ce programme dont j'ai eu en mains un exemplaire, édité par l'Imprimerie nationale en novembre 1880, et peut-être pourrait-on le réimprimer. Ce *Cours de Géométrie* a été supprimé à la mort de Caqué.

Pour mon compte, j'ai eu, il y a une douzaine d'années, à enseigner la géométrie à l'École des Beaux-Arts de Lille ; les documents qui me servirent de guide furent ce programme de Caqué, les livres de Ch. Méray et de L. Saint-Loup, et aussi un vieux livre de Bergery sur la Géométrie appliquée aux arts. J'ai pu ainsi vérifier la supériorité de ces méthodes d'enseignement sur l'exposé de Legendre, quand on s'adresse à des jeunes gens qui ont besoin de comprendre et d'appliquer la Géométrie, et non de la réciter aux examens du baccalauréat. J'ai échangé bientôt cet enseignement contre celui de la Stabilité des Constructions, et la tradition euclidienne a été reprise.

Il me semble que tout cela confirme la justesse des opinions émises dans votre article, mais ne donne guère l'espérance d'arriver à les faire prévaloir.

Veillez agréer, Monsieur le Rédacteur, l'expression de mes sentiments de respectueuse sympathie.

A. BOULANGER.

### Questions et remarques diverses.

13. — *Formules pour les variétés des  $k$  dimensions dans l'espace linéaire  $E_n$  à  $n$  dimensions.* Dans l'espace à 3 dimensions, les formules d'OLINDE RODRIGUES constituent, pour les surfaces, en quelque sorte le pendant des formules de FRENET (SERRET) pour les courbes. Quelles seraient, pour un  $E_n$ , les formules relatives aux variétés des  $k$  dimensions qui constitueraient le pendant des formules de BRUNEL pour les courbes de cet  $E_n$  ?

N.-I. HATZIDAKIS (Athènes).

14. — *Défaut d'analogie en Géométrie* (V. 1901, p. 228). — Si deux triangles  $ABC$ ,  $A'B'C'$  sont tels que les parallèles menées par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  à  $B'C'$ ,  $C'A'$ ,  $A'B'$  concourent en un point  $P$ , les parallèles menées par  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  à  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  concourent en un point  $P'$  (AFAS, Ajaccio, 1901 ; mémoire sur les triangles parallélogiques). Si deux tétraèdres  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  sont tels que les plans menés par  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  paral-

lèlement à  $B'C'D'$ , ...  $A'B'C'$  concourent en un point P, la réciproque n'a pas lieu.

L. RIPERT (Poix, Somme).

15. — Il existe plusieurs ouvrages édités il y a plus de cinquante ans, et dont les récentes éditions ont été annotées par des mathématiciens contemporains, pour être mises au courant des progrès de la science. Ne pourrait-on demander que les annotateurs voulussent bien donner quelques lignes de biographie de l'auteur de l'ouvrage ainsi réédité? Rien ne semble plus facile, et l'on obtiendrait sans doute d'intéresser les éditeurs eux-mêmes à la réalisation de ce vœu.

H. BROCARD.

L'attention de la Rédaction a été appelée par M. H. Brocard, sur les questions suivantes (nos 16 à 21) publiées par l'*Intermédiaire des Mathématiciens* et restées jusqu'ici sans réponse. Ces questions concernant l'enseignement, il y a un réel intérêt à attirer sur elles l'attention des lecteurs de l'*Enseignement Mathématique*.

16. — En 1858, dans le tome II de son *Manuel*, Catalan, employant l'équation actuelle  $F(x, y, z) = 0$  de quadrique, écrivait

$$F'_x = A_x + B''_y + B_z + C \dots$$

en spécifiant que  $F'_x, F'_y, \dots$  représenteraient des *demi-dérivées*. Cette convention, qui était commode, n'est plus admise aujourd'hui parce que l'on a pensé que la désignation par  $F'_x, F'_y, \dots$  des *dérivées entières* est seule conforme à la définition fondamentale de la dérivée d'une forme algébrique. Mais aujourd'hui aussi, on considère comme discriminants des formes quadratiques à 2, 3, ...  $n$  variables, *parce que cela est commode*, les fonctions de coefficients

$$\Delta_2 = (AA'), \quad \Delta_3 = (AA'A''), \quad \dots \quad \Delta_n = (AA' \dots A^{n-1}),$$

tandis que l'application de la définition fondamentale du discriminant d'une forme algébrique donne

$$\Delta_2 = 2^2 (AA'), \quad \Delta_3 = 2^3 (AA'A'') \dots \quad \Delta_n = 2^n (AA' \dots A^{n-1}).$$

Je désirerais connaître les dates, probablement rapprochées, où ont été prises les décisions d'employer, pour les formes quadratiques, d'une part des dérivées entières, d'autre part des fractions de discriminants. Je demande en outre si cette opinion est partagée que les deux décisions ne sont pas logiquement conciliables et qu'il y aurait lieu de revenir à la pratique usitée en 1858 des *demi-dérivées*, qui sont, comme

les fractions de discriminants, la conséquence naturelle de l'introduction des nombres 2 dans les coefficients de  $F = 0$ .

L. RIPERT.

(Question 1699 de l'*Intermédiaire*).

17. — N'y aurait-il pas lieu d'adopter, pour représenter l'équation du second degré à deux variables, la notation anglaise, au lieu de celle que nous employons et que la routine seule peut justifier? Moins expressive peut-être que la notation à indices multiples de Clebsch

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \dots + 2a_{12}x_1x_2 + \dots$$

elle est plus commode pour l'écriture manuscrite. M. Picquet est le seul auteur français, à ma connaissance, qui l'ait préconisée. Elle présente d'immenses avantages dans l'étude générale des coniques; elle donne des formules dans lesquelles la symétrie est d'un grand secours pour les retenir et les employer. Pour quelle raison ne se décide-t-on pas à l'adopter? Je désirerais au moins les connaître si elles existent.

BESOUCLEIN.

(Question 1424 de l'*Intermédiaire*).

18. — En 1841, Vallès a publié : *Etudes philosophiques sur la Science du Calcul*, 1<sup>re</sup> partie. Vers la fin il y a quelques pages sur une méthode de calcul semblable au calcul des équipollences de Bellavitis. Vallès avait-il lu les publications de ce dernier en 1833, 1835 et 1837, ou a-t-il réinventé? A-t-il donné une seconde partie à ses *Etudes philosophiques*?

De 1869 à 1876, il a encore publié : *Des formes imaginaires en Algèbre* (trois volumes, dont un lithographié). Est-ce tout ce qu'il a écrit sur ce sujet intéressant?

C. BERDELLÉ.

(Question 1606 de l'*Intermédiaire*).

19. — Existe-t-il des Traités de Géométrie analytique où, respectivement à la suite de la discussion de l'équation générale du second degré à deux et à trois variables, on discute aussi l'équation générale à deux et à trois variables ne renfermant, outre le terme connu, que des termes du quatrième et du second degré

$$Ax^4 + A'y^4 + 2Bx^2y^2 + 2Cx^2 + 2C'y^2 + D = 0,$$

$$Ax^4 + A'y^4 + A''z^4 + 2Bx^2y^2 + 2B'x^2z^2$$

$$+ 2B''y^2z^2 + 2Cx^2 + 2C'y^2 + 2C''z^2 + D = 0.$$

Je ne demande qu'un renseignement bibliographique.

C. BERDELLÉ.

(Question 1607 de l'*Intermédiaire*).

20. — Nous avons fondé, en Italie, une société qui s'appelle *Mathesis, Associazione per studi fra gli insegnanti di Matematica delle Scuole medie*, dont le but est de perfectionner, au point de vue scientifique et au point de vue didactique, les écoles de Mathématiques et leurs professeurs.

Nous nous proposons de parvenir à ce but en offrant, particulièrement aux membres de l'Association, des questions d'étude, en nous aidant les uns les autres dans nos recherches, en discutant les méthodes d'enseignement, les programmes, les livres de texte, et tout ce qui se rapporte à l'étude des Mathématiques dans les écoles moyennes. Nous serons très obligés à tout lecteur de *l'Enseignement Mathématique* qui voudra nous procurer les renseignements suivants :

1° S'il y a des institutions semblables à la nôtre hors d'Italie, et lesquelles, en y joignant leurs règlements, si c'est possible ;

2° Quels sont les programmes de l'enseignement des Mathématiques, dans les écoles moyennes (classiques ou techniques), dans les divers pays du monde.

Les réponses peuvent être adressées à *l'Enseignement Mathématique* ou directement au soussigné <sup>(1)</sup>.

Rodolphe BETTAZZI (Turin).

(Question 911 de *l'Intermédiaire*).

21. — On sait que l'on peut exposer la théorie des fonctions elliptiques de diverses manières ; au moyen de l'inversion de l'intégrale elliptique, en appliquant la théorie générale des fonctions aux fonctions doublement périodiques ; en partant des fonctions de Jacobi, et enfin, par une méthode élémentaire, analogue à celle qu'on emploie pour les fonctions trigonométriques (Biot et Bouquet, Ch. Hermite, Halphen, Greenhill, Tannery et Molk, Pascal, etc.). Quelle est la méthode la plus recommandable au point de vue de l'enseignement ?

Je crois que la question a une importance capitale et je serais heureux de la voir discuter dans un des congrès internationaux de mathématiciens.

Juan-J. DURAN LORIGA (La Corogne).

(Question 1824 de *l'Intermédiaire*).

Cette dernière question, capitale dans l'Enseignement supérieur, vient d'être agitée à nouveau par M. A.-G. Greenhill dans un remarquable article publié par *l'Annuaire des Mathématiciens*. L'éminent professeur insiste, comme dans toutes ses publications passées, sur les méthodes élémentaires qui prennent naissance par la simple considération des intégrales de certains problèmes de dynamique et montre la grande valeur de ces méthodes pour les futurs praticiens.

(1) Mon adresse est : R., Lycée Cavour, Turin (Italie).

22. — Après la savante communication de M. Beman, relative à Caspar Wessel (voir *l'Enseignement Mathématique*, 1<sup>re</sup> année, 1899, p. 162-184), il sera extrêmement intéressant de signaler une note de Cauchy, suivant laquelle il est possible que la priorité, passée déjà d'Argand à Wessel, doive être attribuée à un troisième inventeur. Effectivement, dans une étude intitulée : *Sur les quantités géométriques, et sur une méthode nouvelle pour la résolution des équations algébriques de degré quelconque* (*Comptes rendus*, t. XXIX, p. 250, 3 septembre 1849). Cauchy ajoute, en note : « Une grande partie des résultats de ces recherches, avait été, à ce qu'il paraît, obtenue, même avant le siècle présent et dès 1786, par un savant modeste, M. Henri Dominique Truel, qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre. »

Je n'ai pas retrouvé de trace de ces documents dans les catalogues de manuscrits de Paris ni de la province ; il serait vivement à désirer que des recherches fussent faites pour avoir un aperçu des résultats obtenus par H. Truel.

H. BROCARD.