# Remarque sur la cycloide.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

minées, sont comprises entre 0'',2 et 2'', on en conclut facilement que les étoiles fixes sont 1 000 000 à 100 000 fois plus loin de nous que le soleil. Pour la constante de l'aberration, on trouve également 20'', parce que le rapport entre la vitesse de la lumière (300 000 kilomètres) et la vitesse de la terre autour du soleil (30 kilomètres) est à peu près 10 000. Toujours quand on veut mesurer un petit angle, comme le champ de vision d'un télescope, des cercles gradués, etc., on doit faire usage de cette formule.

Inversement quand il est question de petites quantités, on peut exprimer une longueur en mesure d'angle. Le théorème de Kepler

$$\mathcal{H} = \mathcal{E} - e \sin \mathcal{E},$$

où $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$ sont mesurés en degrés et où $e$ est très petit, peut se formuler encore ainsi :

$$\mathcal{H} = \mathcal{E} - \frac{e}{\sin 1''} \sin \mathcal{E}.$$

J.-C. Bolt (Rotterdam).

---

## Remarque sur la cycloïde.

1. La cycloïde peut être engendrée par le mouvement composé d'un point qui se meut sur une circonférence, pendant que celle-ci glisse sur une droite, si l'on suppose que les espaces parcourus par le point mobile du cercle et par le point de contact avec la droite sont égaux. C'est, comme on sait, sur ce mode de génération que l'on s'appuie, pour montrer par la méthode de Roberval que la normale à la cycloïde passe par le point de contact correspondant.

Ce mode de génération peut aussi être présenté d'une manière légèrement différente, comme il suit :

La cycloïde est engendrée par le sommet C ou D, d'un parallélogramme *articulé* dont le côté AB glisse sur l'axe $ox$, pendant que les côtés AC et BB tournent autour des points mobiles A et B respectivement, l'espace parcouru par AB étant égale à l'arc décrit par C ou D.

En effet, comme tous les points du côté CD décrivent alors évidemment la même courbe (en des positions différentes), l'on peut, au lieu du parallélogramme, considérer seulement une droite AC dont le point A glisse sur l'axe des $x$ et qui en même temps tourne autour de A. Comme le point C décrit alors, pour un observateur entraîné par le mouvement de A, un arc de cercle, et que ce cercle (si on le décrit) glisse sur une droite parallèle à $ox$ à distance AC, il est évident que tout revient au mouvement composé cité au commencement. M. Schilling a donné dans cette *Revue* (II, p. 31 et suiv.) des propositions sur les courbes *cycloïdales*, dont celle ci-dessus indiquée n'est qu'un cas spécial (une des deux rotations des côtés $SE_1$, $SE_2$ du parallélogramme s'est réduite à une translation); mais, comme il n'insiste pas sur ce cas, je voudrais donner ici la démonstration élémentaire directe de ce mode de génération de la cycloïde, que j'ai donnée à l'Ecole Militaire.

2. Les coordonnées de l'extrémité C sont, si l'on prend pour axe des $y$ la droite sur laquelle se trouve AC, quand elle est perpendiculaire à l'axe $O'x$, les suivantes :

$$x = a \sin\theta + \varphi(\theta), \qquad y = a\cos\theta, \tag{1}$$

où $\theta = \widehat{yO'C}$, $a = AC$ et $\varphi(\theta)$ est l'espace parcouru par le point A. D'autre part, les équations de la cycloïde :

$$x = a(\omega - \sin\omega), \qquad y = a(1 - \cos\omega)$$

transportées aux axes $o'x$, $o'y$ seront (coord. de $O'$ : $a\pi$, $a$) :

$$x = a\omega - a\sin\omega - a\pi, \qquad y = a(1 - \cos a\omega) - a = - \cos\omega,$$

mais

$$\omega = \theta + \pi, \qquad \text{donc } \sin\omega = -\sin\theta,\ \cos\omega = -\cos\theta,$$

d'où

$$\begin{cases} x = a\theta + a\pi + a\sin\theta - a\pi = a\theta + a\sin\theta, \\ y = a\cos\theta, \end{cases}$$

et en supposant $\varphi(\theta) = a(\theta)$, l'on a bien la courbe (1).

C. q. f. d.

3. En partant de l'autre mode de génération : du mouvement d'un point sur le cercle glissant, on démontre que la courbe est une cycloïde, comme il suit :

Les coordonnées relatives de M (axes parallèles à ceux de la cycloïde, par le centre du cercle dans une position quelconque) sont

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta \quad (\theta = x\widehat{O'}M).$$

D'autre part, on a

$$X = x + a\omega, \quad Y = y + a$$

d'où

$$X = a(\omega + \cos\theta), \quad Y = a(1 + \sin\theta),$$

et comme

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - \omega, \quad \cos\theta = -\sin\omega, \quad \sin\theta = -\cos\omega,$$

l'on aura

$$X = a(\omega - \sin\omega), \qquad Y = a(1 + \cos\omega).$$

C. q. f. d.

N.-J. Hatzidakis (Athènes).

---

## Sur la formule de Binet.

La formule de Binet

$$F = \frac{c^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}\right)$$

se trouve ordinairement démontrée dans les Traités soit *indirectement* (c'est-à-dire *après* avoir trouvé la formule

$$v^2 = c^2\left[\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\theta}\right)^2\right]$$

que l'on différentie), soit en égalant à zéro la composante de l'accélération suivant la perpendiculaire au rayon vecteur; cela est direct, mais assez long, parce qu'il faut trouver d'abord les deux composantes de l'accélération. Le moyen suivant est direct et assez court : on a

$$\frac{X}{x} = -\frac{D}{\rho},$$

ou

$$\frac{x''}{x} = -\frac{F}{\rho},$$

ou encore

$$\frac{x''}{\cos\theta} = -F.$$

Calculons $x''$ et ayons égard à la relation

$$\theta' = \frac{c}{\rho^2} : x' = \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta.\theta = \frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta\frac{c}{\rho^2} - \rho\sin\theta\frac{c}{\rho^2}$$

$$= -c\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\theta}\cos\theta - c\frac{\sin\theta}{\rho}; \quad x'' = +c\sin\theta\frac{c}{\rho^2} - \cos\theta\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\theta^2}\frac{c}{\rho^2}$$

$$-\frac{c}{\rho}\cos\theta\frac{c}{\rho^2} - c\sin\frac{c}{\rho^2} = -\frac{c^2}{\rho^2}\cos\theta\left[\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\theta^2}\right],$$