SUR L'INFINIMENT PETIT ABSOLU A PROPOS D'UN ARTICLE RÉCENT SUR L'ATOME DANS LA GÉOMÉTRIE (1)

Autor(en): **Lagrange, Ch.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5582

SUR L'INFINIMENT PETIT ABSOLU

A PROPOS D'UN ARTICLE RÉCENT SUR L'*ATOME DANS LA GÉOMÉTRIE* (¹)

Dès 1892, dans mon *Etude du système des forces* (Appendice) (²), j'ai défendu la nécessité de la considération de l'infiniment petit actuel comme *minimum de la grandeur*; je suis revenu récemment sur cette question dans une note intitulée *Etude du principe de la limite* (³). Mon argument consistait : 1° dans la mention de problèmes classiques dont la solution met en fait en présence de cette notion; 2° Dans une remarque à mon avis capitale sur le vrai sens du symbole *zéro*, qui exprime simplement la non existence de la grandeur, mais que l'on s'est habitué, sous l'influence du langage, à considérer comme un *état de la grandeur*. De cette simple remarque résultait la conception du *moindre état* ou de l'*infiniment petit*.

Le récent article de M. Bonnel vient donner, plus tôt que je ne l'espérais, un appui et une confirmation à la vitalité et au bien fondé de cette thèse. Sous le nom d'*atome*, l'auteur reproduit la même notion du *minimum de la grandeur*. « Dans la collection des états actuels de la grandeur, avais-je dit, il en existe un moindre que les autres; il faut bien l'envisager et lui donner un nom; et ce *moindre état de la grandeur* est l'*infiniment petit* et non *zéro*, par la simple raison que *zéro* n'est pas un de ces états ». M. Bonnel de son côté définit l'atome d'une espèce « la plus petite de toutes les grandeurs infiniment petites de cette espèce ». Je donnais pour exemple d'infiniment petit la distance minimum

(¹) L'*Atome dans la Géométrie*, par M. BONNEL, IVᵉ année, nº 1, de cette revue (15 janvier 1902).

(²) *Mém. de l'Acad. roy. de Belg.*, t. XLVIII, p. 607 et suiv.

(³) *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1901, nºˢ 9-10 (Sept.-Oct.).

entre deux points différents d'une ligne, distance minimum en cette qualité même nécessairement indivisible. L'atome géométrique de M. Bonnel reproduit cette même idée [1].

Un second travail faisant suite au premier (et dont la substance fait l'objet d'un billet cacheté déposé à l'Académie de Belgique dans sa dernière séance) énonce et démontre le fait capital et essentiel, non seulement de l'*égalité*, mais aussi de l'*identité* de nature de cet atome ou infiniment petit absolu (celui qui sert de solution aux problèmes traités dans mes travaux antérieurs cités plus haut) dans la ligne droite et les lignes courbes, dans le plan et les surfaces courbes.

L'apparition du travail de M. Bonnel, si encourageant et si caractéristique de ce mouvement d'idées, m'engage à faire connaître le plus tôt possible ce dernier point décisif. Le sujet est de principe et il va solliciter de plus en plus la méditation des mathématiciens. Qu'il me soit donc permis de reproduire ici un extrait du billet cacheté que je mentionnais plus haut :

« L'infiniment petit absolu ε étant le dernier état de la grandeur avant le zéro, ou le premier que l'on rencontre en en venant (ou la première différence que l'on rencontre en venant d'une grandeur A, ε est un indivisible, il n'a pas de parties car sa moitié serait déjà infiniment petit absolu, et il n'est pas *zéro* puisqu'il existe.

Les ε de deux grandeurs de même *espèce* B_1B_2 (comme une *ligne* droite, une *ligne* courbe), non seulement sont *égaux*, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (car il s'agit d'une donnée propre à la seule notion de grandeur), mais ils sont *identiques*, c'est-à-dire indépendants des *variétés* B_1B_2. *Démonstration* : Si Δx, Δy sont des accroissements de B_1B_2 et qu'on ait $\Delta y = \varphi\,(\Delta x)$ (par exemple x est abscisse et y est soit l'ordonnée, soit l'arc d'une courbe), la nature de $B_2 = y$ est exprimée par la fonction φ. Si ε_2 dépend de φ, on aura (1) $\varepsilon_2 = \varphi\,(\Delta x)$, Δx étant un certain accroissement de x, ou (2) $\varepsilon_2 = \varphi\,(\varepsilon_1)$. Or (1) est impossible; car comme, pour $\Delta x = 0$, Δy

[1] Ce minimum de grandeur n'est autre que la « *particule naissante* des quantités finies » de Newton (« particule par laquelle il faut bien prendre garde de ne pas entendre une particule finie » dit Newton. Pr. Math. Liv. II, Lemme II). Il admet donc des grandeurs ni *nulles* ni *finies*. Mais l'introduction du *temps* gâte tout dans la conception de l'infiniment petit statique actuel. Au fond l'atome de Newton est ici un atome de temps.

$= \varphi(0) = 0$, il existe un Δx tel que $\varphi(\Delta x) = \Delta y < \varphi(\underline{\Delta x})$, c'est-à-dire qu'il existerait un $\Delta y < \varepsilon_2$, ce qui est contradictoire à la définition de ε_2; et (2) n'a pas lieu non plus, sauf pour la fonction d'égalité, puisque $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$. Donc ε_2 est indépendant de la fonction φ. Tous les $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots$ de même espèce sont donc *identiques en nature.*

Application aux lignes courbes. — Les infiniment petits absolus de courbe et de droite étant identiques, une courbe *est* « un polygone » d'infiniment petit absolu, et *la tangente a en commun avec la courbe* non pas un *point* (c'est-à-dire un *néant* de ligne) (ce qui rendrait le fait de sa détermination de position inconcevable), mais bien un *infiniment petit absolu.* Cette notion explique seuls les faits de principe de la Géométrie curviligne, de la cinématique, de la Mécanique [1]; contacts de divers ordres des lignes et surfaces, etc.

La notion de l'infiniment petit absolu conduit à celle des *infiniment grands absolus* propres à des collections de grandeur. Exemple : la *première ordonnée* que l'on rencontre à partir de l'axe des y dans l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$; la somme des circonférences concentriques, celle des rayons, dans le cercle de rayon R.

L'*infiniment petit absolu* et l'*infiniment grand absolu* considérés comme limites (au lieu de 0 et $\frac{1}{0}$) donnent un sens rationnel au « principe de la limite » qu'ils transforment en *théorème* en remplaçant le *zéro* par l'*infiniment petit absolu,* et font disparaître un cas en défaut ».

Enfin, d'accord avec la belle remarque de M. Bonnel sur l'atome unité de toutes les grandeurs, « toute grandeur contient un *nombre entier* d'infiniment petits absolus, car sinon elle en contiendrait un nombre entier et une *partie,* et cela est impossible puisqu'il est indivisible. L'infiniment petit absolu est donc l'élément premier de la construction arithmétique de toutes les grandeurs ».

CH. LAGRANGE, (Bruxelles).

---

[1] Voir *Etude du système des forces,* p. 686 et suiv.