P. Barbarin. — Géométrie non euclidienne. Fascicule i5 de la Collection Scientia. C. Naud, editeur, Paris. Un volume in-8° de 80 pages ; prix : 2 francs.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

BIBLIOGRAPHIE

Albuquerque (Joachim d'Azevedo). — **Trigonometria plana** de conformidade com o programma official do ensino secundario e com 152 exercicios, Un vol. in-8°, 202 p.; Imprensa portuguesa, Porto, 1901.

Ce manuel de Trigonométrie plane contient l'ensemble des matières figurant dans la plupart des programmes d'enseignement secondaire. Son exposé est clair, les définitions sont choisies avec beaucoup de soin et les divers chapitres sont accompagnés de nombreux exercices bien ordonnés. Sauf les restrictions que nous allons faire quant à la marche suivie, il s'agit là d'un bon manuel qui pourra être employé avec succès dans les gymnases portugais.

L'auteur répartit systématiquement les matières en deux parties : 1° fonctions trigonométriques ; 2° résolution des triangles. Il définit les fonctions trigonométriques à l'aide de la notion de coordonnées rectangulaires, puis il fait une étude approfondie de ces fonctions, de leurs relations fondamentales et des formules d'addition. Ce n'est qu'après avoir épuisé l'étude élémentaire des fonctions trigonométriques que l'auteur aborde la résolution des triangles et les applications classiques.

A cette répartition *systématique* qui convient à un enseignement s'adressant à des élèves ayant été initiés aux problèmes de la trigonométrie, nous aurions préféré un ordre plus *méthodique* permettant de mettre en évidence, dès le début, le véritable but de la trigonométrie, et qui consiste à faire une première étude de la résolution des triangles, tout au moins des triangles rectangles, immédiatement après les définitions des fonctions trigonométriques. Nous engageons les professeurs qui sont appelés à utiliser ce manuel à faire suivre les exercices du § 1 de quelques problèmes numériques empruntés à la résolution des triangles. Ces problèmes leur permettront non seulement d'insister sur le but de la trigonométrie, mais d'éveiller aussi chez les élèves de l'intérêt pour l'étude qu'ils abordent.

Quant aux calculs numériques, l'auteur se sert encore des tables à sept décimales, conformément aux programmes portugais. Nous ne doutons pas que si l'auteur avait eu libre choix, il aurait donné la préférence aux tables à cinq décimales, tables actuellement en usage dans la plupart des établissements secondaires. H. F.

P. Barbarin. — **Géométrie non euclidienne**. Fascicule 15 de la *Collection Scientia.* C. Naud, éditeur, Paris. Un volume in-8° de 80 pages; prix : 2 francs.

L'ouvrage que vient de publier M. P. Barbarin est digne de remarque à bien des points de vue. Que l'auteur ait bien exposé la partie de la science à laquelle il s'est attaché, c'est ce qu'on ne saurait mettre en doute, étant donné les efforts connus de longue date qu'il y a consacrés, les mémoires qu'il a présentés à l'Académie de Belgique et que la dite académie a appréciés de la façon la plus honorable, surtout pour un professeur chargé d'un cours absorbant.

Mais ce n'est pas tant à l'exposition, même très claire, d'un grand nombre de faits géométriques, qu'a visé M. Barbarin ; le cadre forcément restreint des volumes de *Scientia* ne le lui permettant guère. Il a voulu surtout faire une œuvre philosophique en montrant rapidement et élégamment la solidité et l'admirable harmonie de la géométrie euclidienne appuyée sur le postulatum d'Euclide et la non moins grande solidité et harmonie des géométries plus générales appuyées sur des postulats plus généraux.

A mon humble avis, c'est ainsi, en effet, qu'un esprit sain doit comprendre les choses. Depuis l'origine de l'espèce humaine, les croyances des hommes ont été des dogmes avec leurs conséquences plus ou moins logiques ; je dis plus ou moins, car les hommes n'ont pas toujours su raisonner logiquement et rigoureusement, même avec des points de départ donnés. Je crois même que beaucoup ne savent pas encore le faire à l'heure actuelle. Mais, comme les grands géomètres dont la science nous conserve les noms ont été de bons logiciens, il s'impose au moins autant d'examiner les postulats franchement dogmatiques sur lesquels ils se sont appuyés que d'en chercher uniquement de nouvelles conséquences.

L'examen du postulatum d'Euclide, montre en lui un fait que notre conception de l'Univers et nos sens grossiers nous font accepter comme vrai et même comme absolument nécessaire dans la pratique vulgaire des êtres géométriques.

Mais, en dépit de ce que dit M. Pietzker dans le précédent fascicule de cette présente publication, je crois que la conception de l'Univers peut varier d'un individu à un autre, tout comme varie également de l'un à l'autre le rapport des crédits que nous accordons respectivement aux témoignages de notre intelligence et aux témoignages matériels de nos sens.

Ce rapport, nul chez la brute et très faible chez un esprit peu cultivé, prend au contraire une valeur très grande chez le philosophe, pour en prendre une infinie chez le métaphysicien.

Et même si l'on pouvait prendre texte de la forme tangible de l'espace pour établir le postulatum d'Euclide, rien n'empêcherait, comme l'a montré M. Poincaré, de concevoir des êtres intelligents vivant dans des conditions physiques différentes des nôtres et telles que le fameux postulatum soit manifestement faux pour eux.

A Euclide, lui-même, comme le dit M. Barbarin, revient la gloire d'avoir mis en évidence les postulats en nombre strictement minimum nécessaire à l'édification de l'admirable géométrie qui porte son nom, mais le géomètre était trop grand et voyait trop loin pour s'imaginer condenser en quelques lignes de la vérité absolue ; il demande qu'on les lui accorde sans ajouter aucune formule d'anathème destinée à qui ne les lui accorderait pas.

L'œuvre, encore debout presque intacte après deux mille ans, est éternelle. Il n'y a pas de contradicteurs de la géométrie euclidienne ; il y a eu seulement des savants comme Lobatchewsky et Riemann qui ont travaillé, à l'exemple d'Euclide, en admettant des postulats différents.

Et comme ces deux derniers étaient aussi d'admirables logiciens et que leurs démonstrations sont incontestables, pourquoi leur contester une gloire qui est exactement de même nature que celle d'Euclide ?

Quant à savoir si ce sont les postulats d'Euclide, ceux de Lobatchewsky, ceux de Riemann ou d'autres qui sont vrais, à quoi bon discuter. Est-il de la nature de l'homme de posséder des vérités absolues. A défaut de choses vraies, la science nous donnera des choses commodes et nous ne pouvons pas, je crois, prétendre à plus.

Après ces lignes, destinées à mettre en évidence l'extrême intérêt de la géométrie non euclidienne, examinons un peu le livre même de M. Barbarin.

Après un premier chapitre de considérations générales et historiques, l'auteur met bien en évidence les postulats admis par Euclide et notamment trois tels que, si l'on en abandonne un des deux derniers, on est conduit immédiatement aux géométries lobatchewskienne et riemannienne.

En admettant les trois ensemble, on retrouve la géométrie euclidienne.

Nous examinons ensuite les travaux de M. de Tilly qui considèrent la distance comme une des notions premières et fondamentales.

Si l'on prend trois points dans un espace à une dimension, c'est-à-dire trois points sur une ligne, il y a une relation bien simple entre les trois distances ainsi déterminées. Dans l'espace à deux dimensions, quatre points déterminent six distances entre lesquelles il y a aussi une relation, encore bien connue dans le cas où les quatre points sont sur un plan euclidien. C'est celle qui lie les côtés et les diagonales d'un quadrilatère.

De même, dans l'espace à trois dimensions, il y a une relation entre les dix distances de cinq points.

Sa complication croît, comme on voit, avec le nombre des dimensions de l'espace. M. de Tilly l'a donnée d'une manière générale, que l'espace soit supposé euclidien ou non.

En étudiant la géométrie générale dans le plan et dans l'espace, M. Barbarin, laisse toujours apercevoir nettement à côté des théorèmes généraux les cas particuliers qui constituent ceux de la géométrie euclidienne. Beaucoup de propositions de la géométrie usuelle qui, par exemple, ne se conservent pas lorsqu'on substitue des longueurs à des angles, se conservent avec une symétrie parfaite en géométrie générale.

L'étude de la trigonométrie est également très suggestive à ce point de vue. En trigonométrie lobatchewskienne les fonctions hyperboliques s'introduisent aussi naturellement que les fonctions circulaires en trigonométrie riemannienne.

La comparaison est tout à l'avantage de l'existence légitime des fonctions hyperboliques que l'on méconnaît trop souvent pour faire usage de notations exponentielles beaucoup plus compliquées.

L'auteur consacre ensuite très indulgemment un chapitre aux contradicteurs de la géométrie non euclidienne.

J'ai expliqué plus haut que les géomètres non euclidiens n'étaient nullement des contradicteurs de la géométrie euclidienne. Mais, chose bizarre, la géométrie générale a rencontré chez certains euclidiens des contradicteurs et même des détracteurs qui rappellent tout à fait l'illustre chevalier Don Quichotte combattant contre les moulins à vent, ne serait-ce que par leur sincérité.

Les objections de ces derniers sont, en général, des cercles vicieux ; ils démontrent le postulatum d'Euclide en s'appuyant sur une de ses conséquences plus ou moins dissimulée. D'autres objections, que M. Barbarin est encore bien bon de discuter, sont insoutenables tout de suite. Certains ont ainsi, prétendu qu'un nombre *abstrait* pouvant déterminer une fraction d'angle droit, et par suite, un triangle équilatéral du plan non euclidien, la longueur égale au côté de ce triangle se trouvait déterminée sans considération d'unité de mesure.

Ils n'ont pas vu, par malheur, qu'un plan non euclidien donné avait un certain paramètre propre qui intervenait comme donnée concrète.

Le dernier chapitre discute la forme géométrique de notre univers. Nous n'en savons à peu près rien et pour nos sens grossiers la géométrie euclidienne semble être celle qui est physiquement vraie.

Des observations astronomiques très précises sont entreprises un peu partout pour déterminer les coordonnées exactes des nébuleuses. Ce n'est peut-être que le jour où l'on connaîtra d'une façon précise les rapports géométriques des immenses distances de ces amas stellaires qu'on pourra en déduire quelque chose de précis sur la nature de l'espace.

Et si jamais il nous était révélé que cet espace ne soit pas euclidien et que la lumière décrit des droites non-euclidiennes on sera dans l'alternative de recourir à la géométrie générale ou de conserver la géométrie ordinaire en admettant que la lumière ne marche pas en ligne droite. Cette dernière façon de procéder ne paraît pas répugner à M. Poincaré.

Une pareille discussion est oiseuse à l'heure actuelle et risque de le rester longtemps encore. Espérons seulement que géomètres et physiciens sauront se mettre d'accord le jour où elle deviendra plus positive.

A. Buhl (Paris).

Cantor (Moritz). — **Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.** Dritter Band. Zweite Auflage. Fascicules 2 et 3 (1700-1758). B. G. Teubner, Leipzig (1), 1901.

Comme le poète, M. Moritz Cantor peut prononcer son *Exegi monumentum* puisque ces deux fascicules terminent l'édition *recensita et aucta* de sa magistrale histoire des mathématiques dont nous allons résumer rapidement les dernières pages.

Après avoir discuté la question de priorité entre Leibniz et Newton, au sujet de la découverte du calcul infinitésimal, l'auteur aborde l'œuvre de Jacques Bernouilli qui précisa les notions émises par Pascal et Fermat sur les probabilités et qui mit entre les mains des mathématiciens le précieux instrument du calcul exponentiel. De son côté Montmort, dans son *Essai sur les jeux de hasard*, donna des formules pour la sommation de certaines suites entre autres celle qui permet de représenter la somme de n termes d'une série dont les différences finissent par s'annuler.

Notons ensuite les noms de Taylor et d'Abraham de Maivre dont les travaux sont étudiés avec grand soin par l'érudit professeur de Heidelberg.

---

(1) Voir *L'Enseignement Mathématique*, IIIe année, no 1 (15 janvier 1901) et no 6 (15 novembre 1901) pour le compte rendu des volumes précédents.