REMARQUES SUR LES VARIATIONS D'UN POLYNOME

Autor(en): **Zervos, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6641

REMARQUES SUR LES VARIATIONS D'UN POLYNOME

I

Si l'on donne à une racine d'un polynôme entier l'accroissement $\Delta\alpha$, les accroissements correspondants des coefficients du polynôme deviennent :

$$
\text{(A)}\qquad
\begin{aligned}
\Delta a_0 &= 0\\
\Delta a_1 &= -\,a_0\,\Delta\alpha\\
\Delta a_2 &= -\,(a_1 + a_0\,\alpha)\,\Delta\alpha\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta a_\nu &= -\,(a_{\nu-1} + a_{\nu-2}\alpha + a_{\nu-3}\alpha^2 + \ldots + a_0\alpha^{\nu-1})\,\Delta\alpha\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta a_\mu &= -\,(a_{\mu-1} + a_{\mu-2}\alpha + a_{\mu-3}\,\alpha^2 + \ldots + a_0\,\alpha^{\mu-1})\,\Delta\alpha.
\end{aligned}
$$

Nous voyons cela, soit en divisant le polynôme donné par $x-\alpha$ et multipliant ensuite le quotient par $(x-\alpha-\Delta\alpha)$, soit en ayant égard aux relations entre les racines et les coefficients.

En observant que

$$a_\mu + \alpha\,(a_{\mu-1} + a_{\mu-2}\,\alpha + a_{\mu-3}\,\alpha^2 + \ldots + a_0\,\alpha^{\mu-1}) = 0$$

nous écrivons les relations (A) comme il suit :

$$
\text{(B)}\qquad
\begin{aligned}
\Delta a_\mu &= \frac{a_\mu}{\alpha}\,\Delta\alpha\\
\Delta a_{\mu-1} &= \left(\frac{a_\mu}{\alpha^2} + \frac{a_{\mu-1}}{\alpha}\right).\Delta\alpha\\
\Delta a_{\mu-2} &= \left(\frac{a_\mu}{\alpha^3} + \frac{a_{\mu-1}}{\alpha^2} + \frac{a_{\mu-2}}{\alpha}\right).\,\Delta\alpha\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta a_1 &= \left(\frac{a_\mu}{\alpha^\mu} + \frac{a_{\mu-1}}{\alpha^{\mu-1}} + \frac{a_{\mu-2}}{\alpha^{\mu-2}} + \ldots + \frac{a_1}{\alpha}\right).\Delta\alpha.
\end{aligned}
$$

Des relations (A) on déduit la formule de récurrence

$$\Delta a_\nu = -a_{\nu-1}\,\Delta\alpha + \alpha\,\Delta a_{\nu-1} \tag{C}$$

d'où suivent divers corollaires pour les variations des coefficients correspondants à la variation de la racine α.

1. — Quand une racine positive devient négative et que dans un groupe de coefficients de même signe du polynôme, un quelconque d'entre eux diminue absolument ou change de signe, tous ceux qui le précèdent changent nécessairement de signe.

Démonstration. — Supposons que nous ayons

$$a_{\nu-2} < 0 \quad a_{\nu-1} < 0 \quad a_\nu < 0$$
$$\alpha > 0 \quad \Delta\alpha < 0 \text{ mais } |\Delta\alpha| > \alpha \quad \Delta a_\nu > 0.$$

de la relation (C) nous tirons alors

$$-a_{\nu-1}\,\Delta\alpha + \alpha.\,\Delta a_{\nu-1} > 0,$$

ou

$$\alpha.\,\Delta a_{\nu-1} > a_{\nu-1}\,\Delta\alpha,$$

ou

$$\alpha.\,\Delta a_{\nu-1} > |a_{\nu-1}|\,.\,|\Delta\alpha|\,,$$

et comme

$$\alpha < |\Delta\alpha|$$

il s'ensuit

$$\Delta a_{\nu-1} > |a_{\nu-1}|\,,$$

donc

$$a_{\nu-1} + \Delta a_{\nu-1} > 0.$$

Pareillement de

$$\Delta a_{\nu-1} > 0$$

on déduit que

$$a_{\nu-2} + \Delta a_{\nu-2} > 0.$$

On démontre de la même manière la proposition correspondante, quand nous avons

$$a_{\nu-2} > 0, \quad a_{\nu-1} > 0, \quad a_\nu > 0.$$

2. — Si dans un groupe de termes de même signe un quelconque

d'entre eux, le dernier excepté, ne change pas de signe, il en sera de même pour le suivant, car autrement le précédent ne pourrait garder son signe.

3. — Le changement d'une racine positive en négative détruit au moins une variation.

Démonstration. — Les coefficients du premier groupe conservent leur signe, puisqu'il en est de même du premier (car $\Delta\alpha_0 = 0$) (voir remarque 2). Ceux du dernier groupe, au contraire, changeront tous de signe, puisqu'il en est de même du dernier terme

$$\text{car } (a_\mu + \Delta a_\mu).a_\mu < 0,$$

comme on déduit des relations (B), puisque

$$(a_\mu + \Delta a_\mu)a_\mu = a_\mu^2 \left(1 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)$$

mais

$$\left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right| > 1$$

d'où

$$1 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha} < 0.$$

(voir remarque 1).

Quant aux autres groupes, trois cas peuvent se présenter :
1° ou tous les termes du groupe conservent leur signe ;
2° ou tous changent de signe ;
3° ou bien présentent une seule variation, de sorte qu'ils peuvent se subdiviser chacun en deux autres groupes, dont le second aura des coefficients ayant conservé leur signe (c'est-à-dire de même signe que les coefficients correspondants du polynôme donné).

Tout cela se voit d'après la remarque I.

Soit ν le nombre des groupes consécutifs du polynôme donné.

Ils présentent $\nu - 1$ variations, cherchons le nombre maximum des variations des coefficients correspondants du nouveau polynôme. Je dis que ce nombre maximum sera $\nu - 2$.

Car on aura ce nombre maximum en supposant que chaque groupe du polynôme donné à partir du deuxième jusqu'à l'avant-dernier fut subdivisé en deux autres groupes. Le nombre des groupes nouveaux, ainsi produits, sera $2\ (\nu - 1)$.

En représentant les groupes du polynôme donné par

$$
\begin{array}{llllllll}
(1) & & \mathrm{L}, & \mathrm{M}, & \mathrm{N}, & \mathrm{P}\ldots & \mathrm{J}, & \mathrm{K} \\
& \text{et par} & \mathrm{L}' & \underbrace{\mu,\mu'} & \underbrace{\nu,\nu'} & \underbrace{\rho,\rho'}\ldots & \underbrace{\sigma,\sigma'} & \mathrm{K}'
\end{array}
\qquad (2)
$$

ceux du nouveau polynôme (c'est-à-dire par L' le groupe des coefficients correspondants à ceux du (L), par μ, μ' les groupes en lesquels fut subdivisé (M e. c. t., etc.). L'on voit que le signe des coefficients du groupe (μ) coïncide avec celui du groupe L, de même le signe des coefficients du groupe (ν) coïncidera avec celui du groupe (μ') et ainsi de suite.

Donc les groupes (2) coïncideront deux à deux en un groupe du nouveau polynôme et par conséquent ce dernier aura $\nu - 1$ groupes, c'est-à-dire $\nu - 2$ variations.

4. — De ce qui précède l'on déduit aussi le théorème de Descartes; car, pour chaque changement d'une racine positive en négative, il faut qu'un nombre impair de variations se perde; ce nombre impair de variations doit donc exister auparavant dans le polynôme. Du reste, après le changement des racines positives en négatives, le polynôme ne présentera pas un nombre impair de variations, car, autrement, il aurait une racine positive.

5. — Dans ce qui précède l'on supposait

$$| \Delta\alpha | > \alpha,$$

mais il est facile de montrer que les propositions précédentes seront vraies aussi pour

$$\Delta\alpha = -\alpha;$$

l'on verra ainsi que, si un coefficient négatif devient positif, le coefficient suivant, s'il est positif, conservera son signe.

6. Soit le polynôme

$$
\begin{aligned}
a_0 x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + \ldots + a^{p-1} x^{\mu-\rho+1} + a_\rho x^{\mu-\rho} + \ldots + a_{\sigma-1} x_{\mu-\sigma+1} + a_\sigma x^{\mu-1} \\
+ \ldots + a_{\tau-1} x^{\mu}{}_{-\tau+1} + a_\tau x^{\mu-\tau} + \ldots + a_{\nu-1} x^{\mu-\nu+1} + a_\nu x^{\mu-\nu} + \ldots + a_\mu,
\end{aligned}
$$

dans lequel nous supposons les coefficients

$$\begin{array}{lll} a_0, \; a_1, \dots & a_{\rho-1} & \text{positifs} \\ a_\rho, \; a_{\rho+1}, \dots & a_{\sigma-1} & \text{négatifs} \\ a_\sigma, \; a_{\sigma+1}, \dots & a_{\tau-1} & \text{positifs} \\ a_\tau, \; a_{\tau+1}, \dots & a_{\nu-1} & \text{négatifs}. \end{array}$$

e. c. t.

Si dans le changement d'une racine positive en racine négative ou nulle nous avons

$$(E) \qquad \begin{array}{l} a_{\sigma-1} + \Delta a_{\sigma-1} > 0 \\ a_\sigma \quad + \Delta a_\sigma \quad > 0 \\ a_{\nu-1} + \Delta a_{\nu-1} > 0 \\ a_\nu \quad + \Delta a_\nu \quad > 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

c'est-à-dire si le dernier terme de chaque groupe négatif devient positif, et que le premier de chaque groupe positif reste positif, alors le polynôme donné n'a d'autre racine positive que α; car le nouveau polynôme aura tous les termes positifs et cela parce que le dernier terme de chaque groupe négatif devenant positif, il s'ensuit que tous ceux du groupe qui précèdent, deviendront positifs; de même le premier terme de chaque groupe positif restant positif, il s'ensuit que tous ceux du groupe qui lui suivent resteront positifs.

Les inégalités (E) peuvent aussi s'écrire comme il suit

$$\begin{array}{l} a_{\sigma-1} - (a_{\sigma-2} + a_{\sigma-3}\alpha + \dots + a_0\alpha^{\sigma-2}) . \Delta\alpha > 0 \\ a_\sigma \quad - (a_{\sigma-1} + a_{\sigma-2}\alpha + \dots + a_0\alpha^{\sigma-1}) . \Delta\alpha > 0 \\ a_{\nu-1} - (a_{\nu-2} + a_{\nu-3}\alpha + \dots + a_0\alpha^{\nu-2}) . \Delta\alpha > 0 \\ a_\nu \quad - (a_{\nu-1} + a_{\nu-2}\alpha + \dots + a_0\alpha^{\nu-1}) . \Delta\alpha > 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

et comme la proposition précédente est vraie aussi pour

$$\Delta\alpha = -\alpha,$$

il s'ensuit que, pour que α soit la seule racine positive de polynôme, il suffit que

$$(\varepsilon) \qquad \begin{array}{l} a_{\sigma-1} + a_{\sigma-2}\alpha + a_{\sigma-3}\alpha^2 + \dots + a_0\alpha^{\sigma-1} > 0 \\ a_\sigma \quad + a_{\sigma-1}\alpha + a_{\sigma-2}\alpha^2 + \dots + a_0\alpha_\sigma \quad > 0 \\ a_{\nu-1} + a_{\nu-2}\alpha + a_{\nu-3}\alpha^2 + \dots + a_0\alpha^{\nu-1} > 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

mais comme de la première des inégalités (τ) suit la seconde (d'après nos suppositions) et de la troisième, la quatrième, les conditions (τ) se réduisent aux seules suivantes :

$$a_{\sigma-1}+a_{\sigma-2}\alpha+a_{\sigma-3}\alpha^2+\ldots+a_0\alpha^{\sigma-1}>0$$
$$a_{\nu-1}+a_{\nu-2}\alpha+a_{\nu-3}\alpha^2+\ldots+a_0\alpha_{\nu-1}>0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et en général, on montre de même que le nombre de variations que présentent les expressions

$$(a_{\rho-1}+\Delta a_{\rho-1},\ a_\rho+\Delta a_\rho,\ a_{\sigma-1}+\Delta a_{\sigma-1},\ a_\sigma+\Delta a_\sigma,\ a_{\tau-1}+\Delta a_{\tau-1},\ a_\tau+\Delta a_\tau,$$
$$a_{\nu-1}+\Delta a_{\nu-1}.)\ldots$$

est précisément égal au nombre de variations que présentera le nouveau polynôme.

7. — Suivant Laguerre un nombre positif α est la limite supérieure des racines positives, si tous les polynômes suivants sont positifs

$$a_0\ (\equiv a'_0),$$
$$a_0\alpha+a_1\ (\equiv a'_1)$$
$$a_0\alpha^2+a_1\alpha+\alpha^2\ (\equiv a'^2)$$
$$a_0\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+\alpha_3\ (\equiv a'_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0\alpha_\mu+a_1\alpha^{\mu-1}+\ldots+a_\mu\ (\equiv a'_\mu)$$

Nous pouvons exprimer cette proposition encore d'une autre manière.

Soit le même polynôme que celui de la sixième observation : Je dis qu'il suffit d'avoir

$$a_0\alpha^{\sigma-1}+a_1\alpha^{\sigma-2}+\ldots\ldots+a_{\sigma-1}>0$$
$$a_0\alpha^{\nu-1}+a_1\alpha^{\nu-2}+\ldots\ldots+a_{\nu-1}>0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

pour que α soit la limite supérieure des racines positives. Car alors la série

$$a_0,\ a_0\alpha+a_1,\ a_0\alpha^2+a_1\alpha+a_2,\ a_0\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+\alpha_3,\ldots\ldots$$

sera aussi composée de termes positifs et cela parce que nous observons qu'aussi pour ces polynômes est vrai la formule de réduction

$$a'_n=a'_{n-1}\alpha+a_n;$$

par conséquent, quand $a'_{\sigma-1}$ est positif, a'_σ sera aussi positif, de même $\alpha'_{\sigma-2}$, car

$$a'_\sigma \quad = a'_{\sigma-1}\,\alpha + a_\sigma,$$

et

$$a'_{\sigma-1} = a'_{\sigma-2}\,\alpha + a_{\sigma-2}.$$

(Nous avons supposé $a_\sigma > 0 \qquad a_{\sigma-2} < 0$).

De même nous pouvons modifier la proposition de Laguerre, d'après laquelle la limite supérieure du nombre des racines positives du polynôme donné, plus grandes que α, est le nombre de variations de la série des expressions

$$a_0,\, a_0\alpha + a_1,\, a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2, \ldots\ldots, a_0\alpha^\mu + a_1\alpha^{\mu-1} + \ldots\ldots \alpha_\mu$$

Pour cela nous montrerons d'une manière analogue, que ce nombre est le même avec le nombre des variations de la série des polynômes

$$\begin{array}{l} a_0\alpha^{\rho-1} + a_1\alpha^{\rho-2} + \ldots\ldots + a_{\rho-1} \\ a_0\alpha^{\sigma-1} + a_1\alpha^{\sigma-2} + \ldots\ldots + a_{\sigma-1} \\ a_0\alpha^{\tau-1} + a_1\alpha^{\tau-2} + \ldots\ldots + a_{\tau-1} \\ a_0\alpha^{\nu-1} + a_1\alpha^{\nu-2} + \ldots\ldots + a_{\nu-1} \\ )\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\end{array}$$

8. — Deux polynômes complets, ayant $m-1$ racines communes et une différente, différeront au moins dans la moitié des coefficients ; car s'ils ne diffèrent pas dans le coefficient du terme dont le rang est n, ils différeront dans celui du rang $n+1$, comme on voit de la relation

$$\Delta a_{\nu+1} = +\alpha.\Delta a_\nu - a_\nu.\Delta\alpha.$$

mais

$$a_\nu \neq 0 \text{ et } \Delta\alpha \neq 0$$

donc

$$\Delta a_{\nu-1} \neq 0.$$

II. Changement des variations d'un polynôme en multipliant par $(x + a)^2 + b^2$.

Considérons l'opération :

$$\begin{array}{l}
a_0 x_\mu + a_1 x^{\mu-1} + a_2 x^{\mu-2} + \ldots + a_{\mu-2} x^2 + a_{\mu-1} x + a_\mu \text{ (polynôme complet).} \\
x^2 + 2\alpha x + (\alpha^2 + b^2) \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
a_0 & x^{\mu+2} + a_1 & x^{\mu+1} + a_2 & x^\mu + a_3 & x^{\mu-1} \ldots + a_{\mu-2} \\
 & \quad + 2\alpha a_0 & \quad + 2\alpha a_1 & \quad + 2\alpha a_2 & \quad + 2\alpha a_{\mu-3} \\
 & & \quad + (\alpha^2 + b^2)\alpha_0 & \quad + (\alpha^2 + b^2) a_1 & \quad + (\alpha^2 + b^2) a_{\mu-4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
x^4 + a_{\mu-1} & x^3 + a_\mu & x^2 & x \\
\quad + 2\alpha a_{\mu-2} & \quad + 2\alpha a_{\mu-1} & \quad + 2\alpha a_\mu & \\
\quad + (\alpha^2 + b^2) a_{\mu-3} & \quad + (\alpha^2 + b^2) a_{\mu-2} & \quad + (\alpha^2 + b^2) a_{\mu-1} & \quad + (\alpha^2 + b^2) a_\mu .
\end{array}$$

1. — Soit $\alpha > | b |$ et $a_\mu . a_{\mu-1} > 0$ alors le nouveau polynôme présentera un nombre de variations moindre ou, au plus, égal à celui du polynôme donné.

Démonstration. — Exprimons par

$a_0, a_1 \ldots, a_\rho$ le premier groupe des termes positifs.
$a_{\rho+1}, a_{\rho+2} \ldots, a_\tau$ le deuxième groupe des termes négatifs.
$a_{\tau+1}, a_{\tau+2} \ldots, a_\sigma$ le troisième groupe des termes positifs.
e. c. t.

Nous observons que, aux $\rho + 1$ premiers termes positifs du multiplicande correspondent $\rho + 1$ premiers termes positifs du produit.

Du a_ρ jusqu'à a_τ il se présente une variation au multiplicande ; je dis qu'il se présentera une, au plus, dans les termes correspondants du produit; parce que dans la série

$$a_{\rho+1} + 2\alpha a_\rho + (\alpha^2 + b^2) a_{\rho-1},\ a_{\rho+2} + 2\alpha . a_{\rho+1} + (\alpha^2 + b^2) a_\rho,$$
$$a_{\rho+3} + 2\alpha a_{\rho+2} + (\alpha^2 + b^2) a_{\rho+1}, \ldots,\ a_\tau + 2\alpha . a_{\tau-1} + (\alpha^2 + b^2) a_{\tau-2}$$

tous les termes à partir du troisième, jusqu'au dernier sont négatifs parce qu'ils se composent de termes négatifs. Les coefficients qui se composent de négatifs et positifs sont le premier et le second coefficient de la série précédente.

Or, quand le premier est négatif, nous avons

$$| a_{\rho+1} | > 2 . \alpha . a_\rho$$

d'où aussi

$$2 . \alpha . \mid a_{\rho+1} \mid > (\alpha^2 + b^2)\, a_\rho,$$

parce que

$$\alpha > \mid b \mid ;$$

par conséquent

$$\mid a_{\rho+2} + 2\alpha a_{\rho+1} \mid > (\alpha^2 + b^2) . a_\rho,$$

c'est-à-dire que le second est aussi négatif; quand, au contraire, le premier est positif, alors quel que soit le second nous aurons une variation. Nous voyons de même que, comme les termes du multiplicande $a_\tau, a_{\tau+1} \ldots\ldots a_\sigma$ présentent une variation, les termes correspondants du produit présentent aussi, au plus, une variation, etc. L'on déduit ainsi la règle suivante : Du premier terme du produit jusqu'à celui qui précède l'avant-dernier, nous avons, au plus, autant de variations que le multiplicande.

Il reste encore à examiner dans le produit les trois derniers termes, c'est-à-dire

$$a_\mu + 2\alpha a_{\mu-1} + (\alpha^2 + b^2)\, a_{\mu-2},\ 2\alpha a_\mu + (\alpha^2 + b^2) a_{\mu-1},\ (\alpha^2 + b^2)\, a_\mu.$$

D'après ce que nous avons démontré, le produit présente, jusqu'au terme dont le rang est $\mu + 1$ autant de variations que le multiplicande, ou moins. Or, si d'abord il en présente autant que le multiplicande, le terme qui a le rang $\mu + 1$ aura le même signe avec celui qui a le rang $\mu + 1$ du multiplicande, autrement le produit présentera, jusque-là, au moins une variation de moins, parce qu'il ne peut en présenter davantage, c'est-à-dire le coefficient $a_\mu + 2\alpha . a_{\mu-1} + (\alpha + b^2)\, a_{\mu-2}$ aura le même signe avec a_μ par conséquent aussi avec $(\alpha^2 + b^2)\, a_\mu$ et aussi avec $2\alpha\, a_\mu + (\alpha^2 + b^2)\, a_{\mu-1}$ car, nous avons supposé que

$$a_\mu\, a_{\mu-1} > 0.$$

donc les trois derniers termes du produit ne présentent aucune variation; si maintenant le produit présente jusqu'au terme qui a le rang $(\mu + 1)$ moins de variations que le multiplicande, alors les variations du produit seront, au plus, aussi nombreuses que celles du multiplicande, car les trois derniers coefficients du produit peuvent présenter, au plus, une variation, puisque

$$a_{\mu-1}\, a_\mu > 0.$$

2. — Tout polynôme entier multiplié par

$$(x+\alpha)^2+b^2$$

où

$$\alpha > |\, b \,|$$

et

$$\alpha \leqq \left| \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} \right|$$

peut bien perdre, mais jamais gagner des variations.

La démonstration est analogue à la précédente ; il suffit d'ajouter ici l'observation que l'avant-dernier coefficient du produit

$$2\alpha\, a_\mu + (\alpha^2+b^2)\, a_{\mu-1}$$

aura le même signe que le dernier, d'après nos conditions.

III. Recherche approximative d'une racine positive d'un polynôme avec le premier terme positif et les autres négatifs

1. — On sait qu'une équation avec une seule variation a une racine positive α et qu'un polynôme multiplié par $x-\alpha$ acquiert au moins une nouvelle variation, il s'en suit que si nous divisons le premier membre de l'équation donnée par $x-\alpha$, nous aurons un polynôme avec des termes tous de même signe.

Soit maintenant un tel polynôme :

$$a_0 x^\mu - a_1 x^{\mu-1} - a_2 x^{\mu-2} - a_3 x^{\mu-3} \ldots\ldots$$

si nous le divisons par $x-a$, nous aurons tous les coefficients du quotient positifs

$$a_0, \quad a_0\alpha - a_1 > 0, \quad a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0,$$

De l'inégalité

$$a_0\alpha - a_1 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha > \frac{a_1}{a_0},$$

de même de l'inégalité

$$a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha^2 - \frac{a_1}{a_0}\alpha - \frac{a_2}{a_0} > 0$$

mais, pour cela, il faut que α soit un nombre plus grand que la racine positive de l'équation

$$x^2 - \frac{a_1}{a_0}.x - \frac{a_2}{a_0} = 0$$

(parce que $\alpha > 0$) d'où

$$\alpha > \frac{a_1}{2a_0} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + \frac{a_2}{a_0}}$$

qui est plus grande que $\frac{a_1}{a_0}$.

IV. Limites de racines

On connaît les relations entre les racines et les coefficients, c'est-à-dire

$$\begin{gathered}\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots = -a_1 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots\ldots = +a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha\beta\gamma\ldots\ldots\gamma = (-1)^\mu a_\mu\end{gathered}$$

Nous pouvons en déduire des règles pour trouver des limites des racines ; par exemple :

1\. — Si dans un polynôme du degré μ avec des racines toutes réelles, nous avons

$$|\, a_{\mu-1} \,| > a_\mu$$

il y aura nécessairement une racine en valeur absolue moindre que μ.

Démonstration. — La somme des produits des racines $\mu - 1$ à $\mu - 1$ donne en valeur absolue le terme $|\, a_{\mu-1} \,|$. La valeur absolue du produit des racines est $|\, a_\mu \,|$. Des produits $\mu - 1$ à $\mu - 1$, le plus grand en valeur absolue est celui qui n'a pas la racine la plus petite ; et si nous multiplions ce produit par μ, nous aurons un nombre plus grand que $|\, a_{\mu-1} \,|$ et par conséquent que $|\, a_\mu \,|$; tandis que si le même produit est multiplié par la racine a plus petite, nous aurons le terme $|\, a_\mu \,|$.

D'où l'on voit que μ est plus grand que la plus petite racine.

2. — Dans un polynôme qui a toutes les racines positives

et

$$|a_\mu| > |a_{\mu-1}|,$$

il y a nécessairement une racine positive plus grande que le degré du polynôme.

Démonstration. — La somme des produits des racines $\mu - 1$ à $\mu - 1$ est égale à $|a_{\mu-1}|$, tandis que le produit de μ racines est égal à

$$|a_\mu|$$

Des produits $\mu - 1$ à $\mu - 1$ le moindre sera celui qui n'a pas la plus grande racine. Donc ce produit, multiplié par μ, nous donnera un nombre plus petit que $a_{\mu-1}$ et par conséquent plus petit que a_μ.

D'où il suit que le nombre μ est plus petit que la plus grande racine.

P. Zervos (Athènes).