Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE LEÇON DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Autor: Schoute, P.-H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6627

UNE LEÇON DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1. — Trois quantités quelconques a, b, c admettent six permutations ; quelle est la position des six points de l'espace dont ces permutations sont les triples coordonnées cartésiennes rectangulaires ? On voit tout de suite que ces six points se trouvent sur le cercle d'intersection du plan $\sum_1^3 x_i = a + b + c$ et de la sphère $\sum_1^3 x_i^2 = a^2 + b^2 + c^2$. De plus, l'expression connue de la distance de deux points de l'espace montre que les deux triples

$$\left.\begin{matrix}(a, b, c)\\(b, c, a)\\(c, a, b)\end{matrix}\right\} , \quad \left.\begin{matrix}(a, c, b)\\(b, a, c)\\(c, b, a)\end{matrix}\right\}$$

de permutations cycliques correspondent aux sommets de deux triangles équilatéraux et que pour $a < b < c$ ces deux triangles égaux n'équivalent quant à leurs sommets à un hexagone régulier que dans le cas où b est la moyenne arithmétique de a et c. Dans le cas ordinaire où $2b \neq a + c$ tous les angles de l'hexagone sont égaux, seulement quant à leur longueur les côtés se groupent en deux triples en succession alternante, de manière qu'un côté plus court se trouve toujours entre deux côtés plus longs, etc. Et cet hexagone à peu près régulier n'obtient la faculté de couvrir par répétition tout le plan que dans le cas particulier $2b = a + c$, où il devient régulier tout à fait.

En transportant parallèlement les plans coordonnés à la nouvelle origine (a, a, a) on passe aux six permutations (o, a_1, a_2), où nous supposons encore $a_1 < a_2$. Dans ce cas il est évident que l'hexagone en question s'obtient en tranchant d'une manière régulière les sommets d'un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$ (fig. 1). Ce qui nous suggère l'idée de considérer le triangle $A_1A_2A_3$ comme triangle de référence d'un système de coordonnées homogènes et dans le plan de ce triangle les six points (o, b_1, b_2) où la somme $b_1 + b_2$ équivaut à la hauteur de ce triangle de référence. Alors les équations $x_i = o$ et $x_i = b_2$ font connaître les

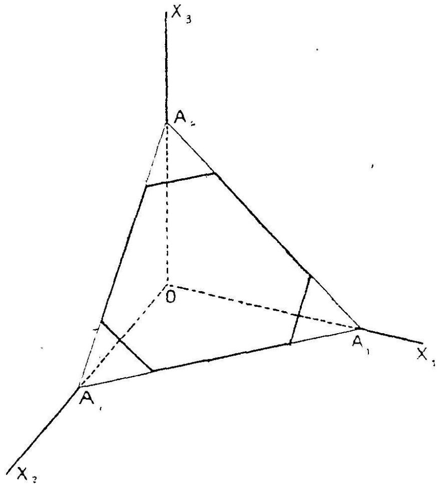

Fig. 1.

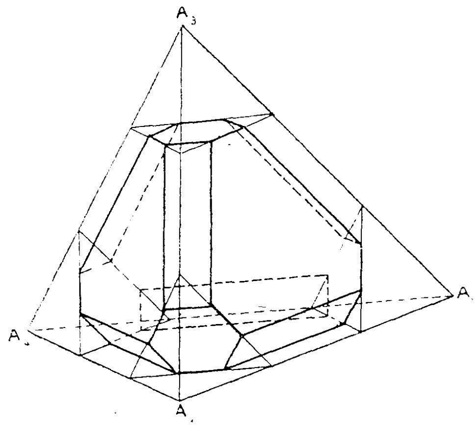

Fig. 2.

deux triples de côtés. Et les six sommets se trouvent trois fois deux à deux sur trois droites parallèles, les droites

$$x_i = o, \; x_i = b_1, \; x_i = b_2 \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

2. — Passons du cas (a, b, c) au cas (a, b, c, d) où il s'agit des 24 points de l'espace à quatre dimensions E_4 dont les coordonnées rectangulaires forment les permutations des quatre quantités a, b, c, d ou après un déplacement parallèle des axes coordonnés des quatre quantités o, a_1, a_2, a_3. Ces 24 points se trouvent sur la sphère d'intersection de l'espace tridimensional $\sum_1^4 x_i = \sum_1^3 a_j$ et de l'hypersphère $\sum_1^4 x_i^2 = \sum_1^3 a_j^2$. Par rapport au tétraèdre régulier $A_1A_2A_3A_4$ dont les sommets sont les points d'intersection avec cet espace, on a affaire aux 24 points (o, b_1, b_2, b_3) où $b_1 < b_2 < b_3$ et $\sum_1^3 b_i = h$, la hauteur du tétraèdre. Ainsi l'on trouve facilement que les 24 points en question sont les sommets d'un tétraèdre,

tronqué d'une manière régulière tant sur les arêtes qu'aux sommets, les plans $x_i = 0$ représentant les faces originales du tétraèdre, les plans $x_i = b_3$ en enlevant les sommets et les plans $x_i + x = b_2 + b_3$ en enlevant les arêtes. Donc le résultat (fig. 2) est un polyèdre à 24 sommets, 36 arêtes et 14 faces que nous représentons par le symbole (24, 36, 14). Seulement dans le cas très particulier où a, b, c, d sont quatre termes consécutifs d'une série arithmétique, ce qui amène les relations $b_1 = \frac{1}{2} b_2 = \frac{1}{3} b_3$, ce polyèdre est limité par huit hexagones réguliers égaux et six carrés égaux et forme donc cette combinaison cristallographique du cube et de l'octaèdre qui jouit de la faculté de remplir tout l'espace tridimensional par répétition (Voir *Revue générale des sciences*, t. V, p. 511).

Dans le cas général les trois espèces de faces sont représentées par les couples d'équations

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c \quad , \quad x_4 = d),\\
&(x_1 + x_2 = a + b, \quad x_3 + x_4 = c + d),\\
&(x_1 = a, \quad x_2 + x_3 + x_4 = b + c + d).
\end{aligned}$$

De la même manière les trois espèces d'arêtes sont représentées par les triples d'équations

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 = a + b, \quad x_3 = c, \quad x_4 = d),\\
&(x_1 = a, \quad x_2 + x_3 = b + c, \quad x_4 = d),\\
&(x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 + x_4 = c + d).
\end{aligned}$$

Pour raccourcir nous représentons les trois espèces de faces par les symboles $(3, 1)_4$, $(2, 2)_6$, $(1, 3)_4$ où les indices 4, 6, 4 indiquent les nombres de plans de chaque espèce. Dans cet ordre d'idées les arêtes se représentent par les symboles $(2, 1, 1)_{12}$, $(1, 2, 1)_{12}$, $(1, 1, 2)_{12}$.

3. — Procédons au cas (a, b, c, d, e) des 120 points de l'espace E_5, où il s'agit d'un pentaédroïde régulier $A_1A_2A_3A_4A_5$ tronqué aux sommets, sur les arêtes et sur les faces, Ici il y a à distinguer les quatre espèces $(4, 1)_5$, $(3, 2)_{10}$, $(2, 3)_{10}$, $(1, 4)_5$ d'espaces limitants; les cinq espaces $(4, 1)$ tronquent le polytope régulier aux sommets, les dix espaces $(3, 2)$ et les dix espaces $(2, 3)$ en font autant sur les arêtes et sur les faces et les cinq espaces (1, 4) sont les espaces originaux du polytope. Ainsi le nombre des espaces limitants est 30. Ensuite on trouve les six espèces $(3, 1, 1)_{20}$, $(1, 3, 1)_{20}$, $(1, 1, 3)_{20}$, $(2, 2, 1)_{30}$, $(2, 1, 2)_{30}$, $(1, 2, 2)_{30}$ de faces, ce qui prouve que le nombre des faces est 150. Et enfin il y a quatre espèces $(2, 1, 1, 1)_{60}$, $(1, 2, 1, 1)_{60}$, $(1, 1, 2, 1)_{60}$, $(1, 1, 1, 2)_{60}$ d'arêtes. Donc le polytope en question admet 120 sommets, 240 arêtes, 150 faces et 30 corps limitants ; nous le représentons par (120, 240, 150, 30).

En général le polytope trouvé est limité par dix espaces en forme de polyèdres (24, 36, 14) et par vingt prismes hexagonaux (12, 18, 8). Dans le cas très particulier où les cinq quantités a, b, c, d, e sont des termes consécutifs d'une série arithmétique, toutes les arêtes ont la même longueur, de manière que les dix polyèdres (24, 36, 14) prennent la forme de la combinaison cristallographique indiquée, tandis que les prismes sont des prismes réguliers limités par deux hexagones réguliers et six carrés.

4. — En augmentant toujours le nombre des quantités entrant dans les permutations on trouve successivement des polytopes caractérisés par les symboles

(720, 1800, 1560, 540, 62)
(5040, 15120, 16800, 8400, 1806, 126)
(40320, 141120, 191520, 126000, 40824, 5796, 254)
. . . .

qu'on obtient toujours en tronquant d'une manière régulière le polytope régulier, à un nombre minimum d'espaces limitants, aux sommets, aux arêtes, aux faces, aux espaces limitants, etc. Nous faisons suivre les calculs assez simples qui se rapportent au cas de huit quantités et donc de $8! = 40\,320$ points.

Espaces E_6		
(7,1) . . .	$2(8)_1 =$	16
(6,2) . . .	$2(8)_2 =$	56
(5,3) . . .	$2(8)_3 =$	112
(4,4) . . .	$(8)_4 =$	70
		254

Espaces E_5		
(6,1,1) . . .	$3(8)_1\,(7)_1 =$	168
(5,2,1) . . .	$6(8)_1\,(7)_2 =$	1008
(4,3,1) . . .	$6(8)_1\,(7)_3 =$	1680
(4,2,2) . . .	$3(8)_2\,(6)_2 =$	1260
(3,3,2) . . .	$3(8)_2\,(6)_3 =$	1680
		5796

Espaces E_4

$$\begin{array}{lrl}
(5,1,1,1)\ldots & 4(8)_1\,(7)_1\,(6)_1 = & 1344 \\
(4,2,1,1)\ldots & 12(8)_1\,(7)_1\,(6)_2 = & 10080 \\
(3,3,1,1)\ldots & 6(8)_1\,(7)_1\,(6)_3 = & 6720 \\
(3,2,2,1)\ldots & 12(8)_1\,(7)_2\,(5)_2 = & 20160 \\
(2,2,2,2)\ldots & (8)_2\,(6)_2\,(4)_2 = & \underline{2520} \\
 & & 40824
\end{array}$$

Espaces E_3

$$\begin{array}{lrl}
(4,1,1,1,1)\ldots & 5(8)_1\,(7)_1\,(6)_1\,(5)_1 = & 8400 \\
(3,2,1,1,1)\ldots & 20(8)_1\,(7)_1\,(6)_1\,(5)_2 = & 67200 \\
(2,2,2,1,1)\ldots & 10(8)_1\,(7)_1\,(6)_2\,(4)_2 = & \underline{50400} \\
 & & 126000
\end{array}$$

Faces.

$$\begin{array}{lrl}
(3,1,1,1,1,1)\ldots & 6(8)_1\,(7)_1\,(6)_1\,(5)_1\,(4)_1 = & 40320 \\
(2,2,1,1,1,1)\ldots & 15(8)_1\,(7)_1\,(6)_1\,(5)_1\,(4)_2 = & \underline{151200} \\
 & & 191520
\end{array}$$

Arêtes.

$$(2,1,1,1,1,1,1)\ldots \quad 7(8)_1\,(7)_1\,(6)_1\,(5)_1\,(4)_1\,(3)_1 = 141120.$$

En cherchant à généraliser ce calcul pour le cas de n quantités, on trouve le symbole suivant

$$\Big(n\,!,\ \frac{n-1}{2}\,n\,!,\ \frac{(n-2)(3n-5)}{24}\,n\,!,\ \frac{(n-2)(n-3)^2}{48}\,n\,!,$$
$$\frac{(n-4)(15n^3-150n^2+485n-502)}{5760}\,n\,!,\ldots,\ 2n-2\Big),$$

qui exige qu'on s'arrête au premier terme disparaissant et qu'on interprète le terme précédent, égal à l'unité, comme se rapportant au polytope lui-même. Probablement les efforts à déterminer le terme général de la suite entre crochets se perdront encore longtemps dans les brouillards de la théorie des partitions.

P.-H. Schoute (Groningue).