# L'ESPACE EST-IL EUCLIDIEN?

La question des Géométries, où se rencontrent à titre égal la Mathématique et la Psychologie ou plutôt la science appelée par les Allemands la *Théorie de la connaissance*, partage avec les questions métaphysiques cette particularité, que la difficulté consiste surtout à en déterminer la signification précise.

Nous nous proposons de faire un exposé d'ensemble de la question, en nous attachant à l'examen de certains points, dont l'obscurité, exploitée par l'ignorance mathématique, a permis la production d'un flot abondant de sophismes.

## I

### Aperçu historique.

Le meilleur moyen d'aborder une question obscure ou obscurcie consiste à en faire un exposé historique.

C'est ce que nous allons faire brièvement, en nous efforçant surtout de dégager l'unité de l'œuvre accomplie par les illustres Géomètres dont nous rencontrerons les noms.

Principes de la géométrie. — Si l'on examine avec quelque attention les démonstrations des théorèmes fondamentaux de la Géométrie, on découvre bientôt qu'elles sont essentiellement basées sur les propriétés des déplacements sans déformation, fait fondamental que les traités élémentaires ont peut-être le tort de ne pas mettre nettement en lumière.

Les propriétés primordiales de ces déplacements constituent donc les vrais axiomes de la Géométrie, et les éléments mis en œuvre dans cette science sont ceux dont la notion est intimement liée à celle de ces déplacements ou, d'une manière plus précise, est invariante dans ces déplacements : un point reste un point, une ligne reste une ligne, une surface reste une surface ; l'égalité, la perpendicularité se conservent, etc.

Ce fait capital s'exprime en disant que *la Géométrie est la théorie des propriétés invariantes dans les déplacements sans déformation*.

Enonçons les propriétés fondamentales des déplacements sans déformation sans trop nous préoccuper des doubles emplois possibles.

L'égalité des figures étant définie par leur superposabilité, c'est-à-dire par la coïncidence au moyen de déplacements sans déformation, la proposition : *deux figures égales à une troisième sont égales entre elles*, exprime que le résultat de deux déplacements opérés successivement peut être obtenu par un seul déplacement, autrement dit que les déplacements constituent un *groupe* d'opérations.

On peut toujours déplacer une figure de manière à amener un de ses points en un point quelconque de l'espace (*transitivité* du groupe).

Si l'on fixe deux points A et B d'une figure, un déplacement continu est encore possible, dans lequel demeurent fixes tous les points d'une ligne passant par les points A et B. On définit ainsi une catégorie de lignes (lignes droites), dans laquelle chacune est déterminée par la connaissance de deux de ses points.

Qu'entend-on par Géométrie non-euclidienne ?

On sait qu'un des axiomes de la Géométrie occupe une place à part dans cette science, c'est le postulat des parallèles, connu aussi sous la désignation, plus ou moins légitime, de XI$^{e}$ axiome d'Euclide et ainsi énoncé par Euclide :

« Lorsque deux droites sont rencontrées par une troisième, de manière que la somme des angles internes situés d'un même côté de cette dernière soit inférieure à deux angles droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se coupent du côté où se trouvent ces deux angles [1]. »

---

(1) « Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθεῖασ εὐθεῖα ἐμπιπτουσα τας ἐντός καὶ ἐπὶ τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομενας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ἄπειρον συμπεπτειν, ἐφ᾽ ἅ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δυο ὀρθῶν ἐλάσσονες. »

Il résulte de là que, si par un point O extérieur à une droite D, on lui mène une perpendiculaire et à celle-ci également une perpendiculaire, cette dernière est la seule droite menée par le point O qui puisse ne pas rencontrer la droite D, et elle ne la rencontrera pas en effet, si l'on ajoute l'hypothèse que par un point *quelconque*, on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une ligne droite.

Travaux divers. — De nombreux efforts ont été faits et sont faits encore pour *démontrer* le postulat des parallèles. Ce qui va suivre montrera clairement la vanité de ces recherches.

Encouragés et sans doute guidés par Gauss, le Russe Lobatchewski (1829) et le Hongrois Bolyai (1832) parvinrent, chacun de son côté, à édifier synthétiquement une Géométrie parfaitement conséquente avec elle-même en laissant de côté cet axiome et en admettant au contraire que l'on peut, par un point extérieur à une droite, lui mener une infinité de parallèles comprises dans un certain angle.

Il semble que Gauss fût déjà parvenu à des résultats analogues dans des recherches qui ne furent publiées que beaucoup plus tard.

Riemann (1854), traitant la question analytiquement, fonda la Géométrie sur la notion de distance généralisée, ou plutôt sur l'expression de l'élément linéaire.

Il parvint ainsi, non seulement à la Géométrie de Lobatchewski-Bolyai, dans laquelle la ligne droite a un segment à l'infini, mais encore à une Géométrie dans laquelle la ligne droite n'a pas de points à l'infini.

Cayley (1859) généralisa également l'idée de distance, d'une manière moins abstraite, en la fondant sur des propriétés projectives.

Nous désignerons, avec Beltrami et Helmoltz, sous le nom de *Géométrie sphérique*, celle de Riemann, et sous le nom de *Géométrie pseudo-sphérique*, celle de Lobatchewski-Bolyai. On distingue aussi ces diverses Géométries au moyen des qualificatifs d'*hyperbolique* (Lobatchewski), *elliptique* (Riemann) et *parabolique* (euclidienne).

On doit aussi citer, dans le même ordre de recherches, les remarquables travaux de Beltrami sur les surfaces à courbure constante.

Les recherches de Riemann étant basées sur les propriétés d'une expression différentielle, ne se prêtaient pas à l'établissement d'un système d'axiomes pouvant servir de base à la Géométrie.

Helmoltz (1868) (1) s'efforça d'énoncer nettement les axiomes communs à la Géométrie euclidienne et aux Géométries non-euclidiennes, c'est-à-dire les propriétés des déplacements d'où peuvent être déduites toutes les propriétés indépendantes du postulat des parallèles.

Axiomes de Sophus Lie. — Sophus Lie (1890) (2), utilisant ses admirables travaux sur les groupes de transformations, montra que les déductions d'Helmoltz se trouvaient, en certains points, erronées, que son système d'axiomes présentait à la fois des insuffisances et des superfluités, et enfin établit, d'une manière qui paraît cette fois définitive, les propriétés des déplacements pouvant donner lieu indifféremment aux Géométries euclidienne et non-euclidienne, et pas à d'autres.

Les principes posés par Lie, pas plus que ceux d'Helmoltz, ne s'expriment pas avec toute la simplicité désirable dans le langage de la Géométrie constructive.

Lie a énoncé deux systèmes équivalents de principes, présentant deux propositions communes, savoir :

I. *L'espace est une variété à trois dimensions.* — La première partie de cette proposition constitue moins l'énoncé d'une propriété qu'une définition donnant au mot *espace* une signification précise : l'ensemble des points.

II. *Les déplacements sans déformation forment un groupe réel et continu.* — Dire que les déplacements forment un groupe, c'est dire que deux figures égales, c'est-à-dire superposables à une troisième, sont égales entre elles.

---

(1) Helmoltz, Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen ; Göttinger Nachrichten, 1868 ; Wissenschaftliche Abhandlungen, 2er Bd, S. 618 ; Barth, Leipzig. Traduit en français par Hoüel ; Hermann, Paris.

(2) Sophus Lie, Leipziger Berichte, 1890 ; *Théorie der Transformationsgruppen* 3er Abschnitt, S. 393 ; Teubner, Leipzig.

Dans un premier système d'axiomes, Lie complète ces deux propositions par la suivante :

III. *Le groupe des déplacements présente la propriété de la libre mobilité* (*freie Beweglichkeit*) *dans l'infinitésimal*, en entendant par là que, un point étant maintenu fixe, ainsi qu'un élément linéaire passant par ce point, un déplacement continu est encore possible, mais que tout déplacement devient impossible, si l'on fixe en outre un élément superficiel contenant cet élément linéaire.

Cette proposition pourrait, me semble-t-il, être remplacée par la suivante, qui a une signification constructive :

On peut toujours fixer un point quelconque, ainsi qu'un autre suffisamment voisin du premier, de manière qu'un déplacement continu soit encore possible ; mais on rend tout déplacement impossible en fixant un nouveau point convenablement choisi sur une surface quelconque passant par les deux premiers points.

Dans un second système d'axiomes donné par Lie, l'axiome de la *libre mobilité* est remplacé par deux autres, que nous traduirons, dans le langage de la Géométrie constructive, de la manière suivante :

1° *Si l'on maintient fixe un point quelconque, tous les points susceptibles d'être atteints par un autre point quelconque sont situés sur une surface contenant le second point et ne contenant pas le premier ;*

2° *Autour du point fixe il existe un domaine triplement étendu et de dimensions finies, dans lequel tout point peut atteindre, par un déplacement continu, tout autre point situé sur la surface correspondante, définie ci-dessus.*

Chacun des deux systèmes d'axiomes de Lie exprime des propriétés appartenant à tout groupe continu de transformations projectives conservant une quadrique, ordinaire ou dégénérée en une courbe plane, à condition toutefois de se limiter à un domaine convenablement choisi.

Bien plus, il s'applique à tout groupe semblable à un de ces groupes, c'est-à-dire à tout groupe obtenu par une transformation générale opérée sur les variables, et il ne s'applique qu'à de tels groupes.

Telle est la proposition démontrée par Sophus Lie en se basant sur les propriétés, découvertes par lui-même, des groupes de transformations.

Il résulte de là que, si l'on appelle « point » l'ensemble de trois coordonnées, et « déplacements sans déformation », les transformations de l'un des groupes ainsi définis, on pourra établir, par rapport à ce groupe, des définitions et des propriétés correspondantes à celles de la Géométrie où n'intervient pas le postulat des parallèles.

Quant à ce postulat, il devra être remplacé par d'autres propositions convenablement choisies suivant le groupe pris pour base.

Enfin nous citerons les ouvrages de M. Klein [1] (1889-90) sur la Géométrie non-euclidienne, où l'on trouvera, en plus d'un bel exposé des travaux indiqués ci-dessus (sauf ceux de Lie), des résultats personnels du plus haut intérêt, notamment sur les diverses formes d'espace susceptibles de correspondre à une même détermination métrique.

Des travaux illustres que nous venons d'énumérer résulte sans conteste la possibilité d'établir, en écartant le postulat des parallèles, des Géométries conséquentes avec elles-mêmes et, par suite, l'impossibilité de démontrer ce postulat en s'appuyant sur les autres axiomes.

D'ailleurs, un simple regard jeté sur une surface sphérique montre qu'on y peut réaliser une Géométrie satisfaisant, à l'intérieur d'un domaine convenablement limité, aux axiomes d'Euclide, à l'exception du postulat des parallèles.

## II

### Les Géométries et leurs relations.

Différentes Géométries. — Nous allons étudier d'un peu plus près les différentes Géométries et les relations que l'on peut établir entre elles.

---

(1) Klein. *Nicht-Euclidische Geometrie Vorlesungen*, ausgearbertet von Fr. Schilling, Gottingen, 1893.

Y aurait-il autant de Géométries qu'il y a de groupes de transformations du type indiqué par Sophus Lie ?

Nullement, pourvu que l'on n'envisage que l'enchaînement logique des propositions, en faisant abstraction de la diversité des figures susceptibles de leur correspondre.

La Géométrie correspondante à un groupe ne dépend que des propriétés que présentent, par rapport à ce groupe, les notions fondamentales relatives à ce groupe : lignes jouant le rôle des lignes droites, fonction jouant le rôle de la distance, etc., de sorte qu'une seule Géométrie correspond à tous les groupes susceptibles de se transformer l'un dans l'autre par un changement quelconque, toutefois réel, de variables.

On peut donc se borner à considérer les groupes dans lesquels les lignes jouant le rôle des lignes droites sont effectivement les lignes droites de la Géométrie vulgaire, c'est-à-dire les groupes projectifs conservant les quadriques de cette dernière Géométrie, et, parmi ceux-ci, ne distinguer que trois cas (certains cas étant éliminés par les conditions auxquelles doit satisfaire la mesure des angles), donnant lieu à trois Géométries, savoir :

Quadrique réelle (domaine intérieur), Géométrie pseudo-sphérique ;

Quadrique imaginaire à équation réelle, Géométrie sphérique ;

Quadrique dégénérée en une conique imaginaire, Géométrie euclidienne ;

On est toutefois conduit, comme on le verra plus loin, à introduire dans les Géométries non-euclidiennes un paramètre, qui semblerait indiquer que ces Géométries forment une série simplement infinie.

Nous verrons qu'en fait ce paramètre est arbitraire, quand on ne considère que la Géométrie où il figure et qu'il ne caractérise une propriété de celle-ci que lorsqu'on la compare à une autre présentant avec la première certaines relations.

Distance généralisée suivant Cayley. — Nous pouvons évidemment nous servir de la Géométrie vulgaire comme système d'analyse pour étudier, au point de vue qui nous occupe, un groupe conservant une quadrique. Soit l'équation de la quadrique

$$\Omega_{xx} = 0,$$

le premier membre représentant une fonction du second degré des coordonnées $x$, $y$, $z$.

Le groupe admet un invariant simultané relatif à deux points quelconques $x, y, z$ ; $x', y', z'$, savoir le rapport anharmonique formé par ce couple de points avec les points d'intersection de la quadrique et de la droite qui les joint.

En posant

$$\Omega_{xx'} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial x}x' + \frac{\partial\Omega}{\partial y}y' + \frac{\partial\Omega}{\partial z}z'\right]$$

ce rapport anharmonique a pour expression

$$F(x, x') = \frac{\Omega_{xx'} + \sqrt{\Omega^2_{xx'} - \Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}}{\Omega_{xx'} - \sqrt{\Omega^2_{xx'} - \Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}},$$

et l'on peut choisir pour l'invariant une fonction quelconque de cette quantité.

Pour trois points, $x, y, z$ ; $x', y', z'$ ; $x'', y'', z''$, en ligne droite et se succédant dans l'ordre où ils sont écrits, l'on a

$$F(x, x'') = F(x, x') \times F(x', x''),$$

formule que l'on vérifiera en remplaçant dans le second membre les coordonnées du second point par les expressions

$$x' = tx + \theta x''$$
$$y' = ty + \theta y''$$
$$z' = tz + \theta z'',$$

où $t$ et $\theta$ sont des nombres compris entre zéro et l'unité et ayant leur somme égale à l'unité.

Si l'on veut que la distance soit une fonction satisfaisant, dans les conditions ci-dessus, à la relation

$$f(x, x'') = f(x, x') + f(x', x''),$$

son expression générale devra être évidemment

$$(1) \qquad f(x, x') = c \log \frac{\Omega_{xx'} + \sqrt{\Omega^2_{xx'} - \Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}}{\Omega_{xx'} - \sqrt{\Omega^2_{xx'} - \Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}},$$

ou encore

$$(2) \qquad f(x, x') = 2\, ic \text{ arc } \cos \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}} = 2 \text{ arc tang } \frac{\sqrt{\Omega^2_{xx'} + \Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}}{\Omega_{xx'}},$$

où $c$ est une constante arbitraire.

L'expression (1) conviendra au cas de la quadrique réelle, et l'on devra alors choisir pour $c$ une valeur réelle et positive; l'expression (2) conviendra au cas de la quadrique imaginaire, et l'on devra alors donner à $c$ une valeur imaginaire pure

$$c = c'i.$$

On voit qu'en Géométrie sphérique (ou riemannienne) la mesure des distances sur une ligne droite présente les mêmes caractères que la mesure des angles autour d'un point dans la Géométrie plane ordinaire.

Paramètre des Géométries non-euclidiennes. — Le paramètre $c$ (paramètre $k$ de Gauss et de Lobatchewski) représente une longueur déterminée, savoir la distance de deux points dont le rapport anharmonique relativement à la quadrique fondamentale est égale à $e$.

Donner une valeur déterminée à $c$ revient à fixer l'unité de longueur.

L'introduction du paramètre $c$ présente l'avantage de rendre arbitraire l'unité de longueur et par suite homogènes les formules des Géométries non-euclidiennes; mais la propriété consistant dans l'homogénéité des formules n'aura pas le même caractère que dans la Géométrie euclidienne. Dans cette dernière, la multiplication par un même nombre de toutes les longueurs figurant dans une formule peut être interprétée soit comme un changement d'unité, soit comme une modification par similitude des figures; dans les Géométries non-euclidiennes, cette dernière interprétation n'est pas possible, car la longueur représentée par le paramètre $c$ est liée à la Géométrie même et ne peut être modifiée par une transformation ponctuelle.

Déterminations métriques présentant un contact en un point. — Nous avons vu qu'il n'existait, à proprement parler, que trois Géométries différentes, en désignant par le mot Géométrie un ensemble de propositions, susceptibles d'ailleurs de correspondre à des images géométriques diverses. Dans cet ordre d'idées, on ne distingue pas, par exemple, la Géométrie riemannienne sur le plan de la Géométrie sur la sphère, quoique les propositions de l'une et de l'autre ne deviennent identiques qu'en remplaçant dans cette dernière les mots grand cercle par ligne droite.

Une même Géométrie peut être obtenue en choisissant des opérations différentes pour définir l'égalité, c'est-à-dire la superposabilité ; l'égalité aura les mêmes propriétés, mais les figures égales ne seront pas les mêmes dans les deux cas.

Mais rien n'empêche d'envisager à la fois dans l'espace, conçu simplement comme l'ensemble des points, les différents groupes de transformations susceptibles, suivant le théorème de Lie, de donner lieu à des systèmes de détermination métrique.

Les groupes dans lesquels les lignes jouant le rôle des droites sont les mêmes, donneront lieu aux mêmes propriétés projectives des figures. Ces groupes sont compris dans un même groupe, savoir le groupe projectif général.

Il peut exister entre deux de ces groupes une relation consistant en ce que les déterminations métriques correspondantes donnent lieu, en un point déterminé de l'espace, aux mêmes propriétés, aux infiniment petits près d'ordre supérieur.

M. Kleïn (1) exprime cette relation en disant que les deux déterminations métriques (*Maassbestimmungen*) présentent un contact en un point.

Considérons une détermination euclidienne et une détermination non-euclidienne présentant un contact en un point O.

En ce point, le cône isotrope euclidien doit se confondre avec le cône tangent à la quadrique fondamentale non-euclidienne, c'est-à-dire que le plan de l'infini et le cercle imaginaire de l'infini euclidiens se confondent respectivement avec le plan polaire du point O par rapport à cette quadrique fondamentale et avec l'intersection de ce plan et de cette quadrique.

Autrement dit, la quadrique fondamentale du systéme non-euclidien considéré est, dans le système euclidien considéré, une

(1) Klein. *Math. Annalen*, Bd. IV, S. 573; traduit en français par Laugel, Paris.

sphère ayant pour centre le point O, et par suite de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4c^2 = 0,$$

$c$ étant réel ou purement imaginaire et de la forme $i\,c'$.

On est conduit, d'après les idées de Riemann et de Beltrami, à donner le nom de courbure à l'expression

$$\frac{1}{4c^2},$$

la courbure étant positive pour une géométrie sphérique (quadrique fondamentale imaginaire) et négative pour une géométrie pseudo-sphérique (quadrique fondamentale réelle).

Il reste bien entendu qu'il ne faut associer à ce mot de courbure aucune des images géométriques qu'il éveille dans la théorie ordinaire des surfaces et des courbes.

Formons, d'après la formule (1) ou (1 *bis*), l'expression de l'élément linéaire $ds$ relatif à la détermination non-euclidienne correspondante à la quadrique ci-dessus.

Cette expression contient un paramètre arbitraire $c$, mais la condition de retrouver, pour $x = y = z = 0$, l'expression euclidienne de l'élément linéaire, conduit à l'égalité des deux paramètres que nous avons désignés par la même lettre $c$ en prévision de ce résultat, et l'on a finalement :

$$ds^2 = 4c^2\,\frac{4c^2(dx^2+dy^2+dz^2)-(y\,dx-x\,dy)^2-(z\,dy-y\,dz)^2-(x\,dz-z\,dx)^2}{(4c^2-x^2-y^2-z^2)^2}.$$

On voit que cette expression se confond avec l'expression habituelle de l'élément linéaire, non-seulement pour $x = y = z = 0$, mais encore, $x$, $y$ et $z$ étant quelconques, pour $c^2 = \infty$.

Par la condition que les deux géométries considérées donnent lieu à la même détermination métrique au point O, la longueur non euclidienne $c$ a pris une signification par rapport à la géométrie euclidienne, et devient caractéristique de la géométrie non-euclidienne considérée parmi celles qui ont un contact en O avec cette géométrie euclidienne.

On remarque que, tandis qu'il existe une série simplement infinie de géométries non-euclidiennes ayant un contact en un point donné avec une géométrie eucidienne, il n'existe qu'une géométrie euclidienne jouissant de cette propriété par rapport à une géométrie non-euclidienne donnée.

Pour comparer les déterminations métriques sur une ligne droite, faisons dans la formule donnant l'expression de l'élément linéaire :

$$y = z = 0.$$

On a alors, $x$ désignant la distance au point O suivant la détermination euclidienne et $s$ la même distance suivant la détermination non-euclidienne :

$$ds = \frac{4c^2 dx}{4c^2 - x^2}.$$

En géométrie pseudo-sphérique (lobatchewskienne) :

$$s = 2c \log \frac{(2c + x)^2}{(2c - x)^2}.$$

En géométrie sphérique (riemannienne), l'on a pour $c' = i\, c''$,

$$ds = \frac{4c'^2 dx}{4c'^2 + x^2}, \quad s = 2c' \text{ arc tang } \frac{x}{2c'}.$$

Nous venons de voir comment se présentent les déterminations métriques non euclidiennes, dans l'analyse euclidienne.

Pour varier les points de vue, supposons, au contraire, que, tout en employant des instruments de mesure non-euclidiens, l'on continue à tenir pour exactes les formules et les raisonnements euclidiens.

Dans ces conditions, l'on remplace en chaque point de l'espace la détermination métrique non-euclidienne par la détermination euclidienne présentant avec la première un contact en ce point, de même que l'on emploie souvent, à la place d'une petite portion sphérique une représentation plane obtenue en projetant cette portion superficielle sur son plan tangent.

Toute détermination métrique directe (d'angle ou de distance) se confondra ainsi en chaque point avec la vraie, et la longueur d'une ligne obtenue par la mensuration successive de ses segments élémentaires sera concordante avec la longueur qui résulterait de la determination non-euclidienne considérée.

Mais la détermination euclidienne employée différera d'un point à un autre, de sorte que les résultats ainsi obtenus par des mesures directes ne seront pas concordants avec les résultats *calculés* au moyen des formules euclidiennes. C'est ainsi que l'on constatera, par exemple, que la somme des angles d'un triangle est différente de deux angles droits.

Géométrie euclidienne sur la sphère. — Pour associer quelques images géométriques aux considérations analytiques exposées dans ce paraphe, appliquons celles-ci à la Géométrie sur une sphère, c'est-à-dire à l'ensemble des proprîétés invariantes dans les déplacements sans déformation conservant cette surface, déplacements qui sont les rotations autour du centre.

Parmi les notions primordiales, l'on trouve le point et le grand cercle.

On peut toujours, par un déplacement, amener un point en un autre point quelconque de la sphère.

Un point de la surface étant fixe, on peut encore opérer un déplacement de manière à amener un autre point quelconque sur un grand cercle passant par le point fixe.

Par un point on peut mener un grand cercle, et généralement un seul, perpendiculaire à un grand cercle donné.

On déduit de ces propriétés tout un ensemble de propositions, qui deviendraient identiques aux propositions de la géométrie plane indépendantes du postulat des parallèles, moyennant le remplacement des mots *grand cercle* par *ligne droite*.

Il y a lieu d'observer toutefois qu'on doit, pour cette équivalence, se limiter sur la sphère, à un certain domaine, en raison du fait suivant :

Tous les grands cercles passant par un point passent par son opposé et sont perpendiculaires au grand cercle dont ces points sont les pôles.

Nous reviendrons plus loin sur cette particularité.

Pour comparer deux déterminations métriques au moyen d'images sphériques, comme nous l'avons fait au moyen d'images planes, prenons sur la sphère, pour système de référence, deux grands cercles rectangulaires se coupant en un point O, pris pour origine.

Les coordonnées d'un point M seront les longueurs X et Y des arcs de ces grands cercles compris entre le point O et les grands cercles menés par M perpendiculairement aux premiers.

Les trois coordonnées du point M par rapport à un système trirectangulaire ayant pour origine le centre de la sphère, un des axes passant par le point O, ont pour expression :

$$R\frac{\operatorname{Cos}\frac{X}{R}\operatorname{Sin}\frac{Y}{R}}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}+\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}-\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}}},$$

$$R\frac{\operatorname{Cos}\frac{X}{R}\operatorname{Cos}\frac{Y}{R}}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}+\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}-\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}}},$$

$$R\frac{\operatorname{Cos}\frac{Y}{R}\operatorname{Sin}\frac{X}{R}}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}+\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}-\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}}}.$$

On vérifiera que tout déplacement sans déformation de la sphère, savoir une rotation autour de son centre, laisse invariante l'équation

$$\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}+\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}-\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}=0.$$

ou

$$\operatorname{tg}^2\frac{X}{R}+\operatorname{tg}^2\frac{Y}{R}+1=0.$$

Posons

$$x=R\operatorname{tg}\frac{X}{R},\qquad y=R\operatorname{tg}\frac{Y}{R}.$$

Tout déplacement sans déformation de la sphère sera représenté par une transformation projective en $x$ et $y$ conservant l'équation quadratique :

$$x^2+y^2+R^2=0.$$

Un grand cercle de la sphère a une équation de la forme

$$a\operatorname{Cos}\frac{X}{R}\operatorname{Sin}\frac{Y}{R}+b\operatorname{Cos}\frac{X}{R}\operatorname{Sin}\frac{Y}{R}+c\operatorname{Cos}\frac{X}{R}\operatorname{Cos}\frac{Y}{R}=0.$$

ou

$$ax+by+c=0.$$

La position d'un point sur la sphère est une fonction périodique des coordonnées X et Y, de sorte que les systèmes de valeurs X, Y et $X + 2\pi R$, $Y + 2\pi R$, représentent le même point.

Les coordonnées $x$ et $y$ sont également des fonctions périodiques de X et Y, mais de période $\pi R$, de sorte qu'aux deux points X, Y et $X + \pi R$, $Y + \pi R$ correspond le même système de valeurs $x$, $y$.

En laissant de côté un des deux points correspondants à $x$ et $y$, on ne considère, en faisant varier $x$ et $y$ de $-\infty$ à $+\infty$, que la demi-sphère limitée par un grand cercle ayant pour pôle le point O. Le groupe euclidien ayant un contact en O avec le groupe des déplacements sphériques est représenté par le groupe projectif continu en $x$, $y$, conservant l'équation

$$x^2 + y^2 = 0.$$

La courbe de l'infini relatif à ee système euclidien est le grand cercle ayant pour pôle le point O.

Par un de ces déplacements euclidiens, un point quelconque de la demi-spère ne pourra jamais atteindre ce grand cercle.

Les rotations euclidiennes autour du point O se confondent avec les rotations sphériques.

Une translation euclidienne sera une transformation dans laquelle tous les points décrivent des grands cercles perpendiculaires à un même grand cercle passant par le point O. On voit que ces grands cercles rencontrent le grand cercle de l'infini au même point. Ils jouent le rôle des parallèles de la géométrie plane ordinaire.

Ainsi se trouvent réalisées, sur la sphère, deux géométries : l'une non-euclidienne, qui est relative aux déplacements vulgaires de la sphère ; l'autre euclidienne, qui comprend un ensemble de de propriétés susceptibles d'être exprimées par les mêmes propositions que les propriétés de la géométrie plane ordinaire.

## III

### L'Infini géométrique.

Diverses conceptions de la ligne droite et du plan. — Nous nous sommes efforcés, dans les pages précédentes, en variant les figures que l'on peut faire correspondre à une même relation logique, de détruire certaines associations d'idées, et de montrer notamment que la détermination métrique des longueurs et des angles constitue une idée indépendante de la conception même des figures.

La conclusion qui s'en dégage est celle-ci :

On peut, tout en maintenant les concepts vulgaires du point, de la droite et du plan, obtenir des géométries conséquentes avec elles-mêmes en modifiant d'une certaine manière l'idée de la détermination métrique, de sorte que les propriétés où intervient l'idée de mesure peuvent être très différentes de celles de la géométrie ordinaire.

On comprend que la somme des angles d'un triangle ne soit plus égale à deux angles droits, si la mesure des angles est tout autre qu'en géométrie euclidienne et si les angles droits eux-mêmes ne sont pas ceux de cette géométrie.

Il semble, dans ces conditions, qu'on ne doive rencontrer aucune difficulté à admettre les conceptions nouvelles à côté des conceptions ordinaires.

C'est pourtant dans les difficultés que l'esprit éprouve à créer des images géométriques correspondantes aux concepts des géométries non-euclidiennes que l'on doit voir l'origine de la répugnance qu'ils inspirent à certains esprits.

C'est que, contrairement à nos prévisions, ce ne sont pas seulement nos conceptions de la mesure qui exigent des modifications, mais encore nos conceptions de la droite et du plan et surtout de l'infini. Il y a là un fait inattendu qui doit être examiné.

Nous pouvons nous borner au cas de la géométrie sphérique (ou riemannienne).

Considérons d'abord la géométrie sur la ligne droite.

On a vu que la détermination riemannienne $s$ de la distance à un point O est liée à la détermination euclidienne $x$ ayant un contact avec la premiàre en O par la formule

$$x = 2\,c' \operatorname{tang} \frac{s}{2\,c'}.$$

La présence d'une fonction trigonométrique suggère l'assimilation de la droite au cercle, c'est-à-dire l'hypothèse que deux valeurs de $\frac{s}{2c'}$ ne représentent un même point de la droite que lorsque ces valeurs diffèrent d'un multiple de $2\pi$, de sorte qu'on doit, à chaque point de la conception euclidienne déterminée par une valeur de $\frac{s}{2c'}$ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, associer un point étranger à cette conception et correspondant à la valeur $\frac{s}{2c'} + \pi$.

Les points de la droite vers lesquels on tend par les déplacements euclidiens effectués dans les deux sens et qui, dans la conception ordinaire, se confondent, seraient séparés par un segment correspondant point par point au segment de cette dernière conception.

Cette nouvelle conception de la ligne droite est tout aussi légitime que la conception ordinaire comportant un point à l'infini, vers lequel on tend en se déplaçant dans un sens ou dans l'autre.

Mais on peut tout aussi légitimement admettre que les deux points correspondants à une valeur de $x$, que nous avons séparés, soient de nouveau réunis et que les angles $\frac{s}{2c'}$ et $\frac{s}{2c'} + \pi$ représentent le même point de la droite.

A chacune de ces conceptions correspond une conception du plan et une conception de l'espace ; d'où deux sortes de géométries correspondantes à la même détermination métrique.

Dans l'une de ces géométries, à laquelle M. Klein réserve la dénomination de *Géométrie sphérique* en raison de sa plus grande analogie avec la géométrie sur la sphère, l'on admet que l'espace comprend des points situés au-delà de l'infini euclidien.

Dans l'autre Géométrie, appelée par M. Klein *Géométrie elliptique*, l'espace ne comprend que les points de la conception vulgaire.

Degré de connexité du plan. — La question relative au nombre de points de l'espace qui correspondent à un même système de valeurs des coordonnées nous paraît être indépendante de celle des parallèles, quoique ce soit l'étude de cette dernière qui nous y ait conduits.

La question se pose, non seulement indépendamment de toute particularisation de la détermination métrique, mais encore en l'absence de toute idée de détermination métrique.

Nous nous en rendrons compte au moyen de la Géométrie projective sur la ligne droite.

On sait que l'on peut déterminer la position d'un point sur la ligne droite, sans l'intervention de l'idée de distance, au moyen d'un système général de coordonnées projectives, le système étant caractérisé par le choix des points correspondants à trois valeurs de la coordonnée, par exemple $0$, $1$ et $\infty$.

Chacun des points de la droite est déterminé univoquement par un nombre compris entre $-\infty$ et $+\infty$, les nombres $-\infty$ et $+\infty$ correspondant au même point, et le point de l'infini sur la droite correspondant à une valeur quelconque.

On peut d'ailleurs, par des transformations projectives, amener le point de l'infini en un point quelconque en lui faisant parcourir la droite dans un sens ou dans l'autre, et amener un point quelconque en un autre point quelconque en passant par le point de l'infini.

Il résulte de là que les propriétés projectives d'une ligne droite sont celles d'une ligne *fermée* (certains disent *illimitée*).

Pour des raisons analogues, le plan doit être considéré comme une surface fermée.

Mais alors nous nous trouvons en présence de ce fait : Etant donnée une droite D (ligne fermée) sur un plan (surface fermée), un point peut, en suivant une ligne droite, passer d'un côté à l'autre de la droite D sans traverser cette ligne, propriété qui indique que le plan est une surface à double connexité.

En outre, on peut obtenir le résultat indiqué au moyen d'une trajectoire différant aussi peu que l'on voudra de la droite D, ce qui exige que le plan soit une surface *double*. On peut former par exemple une surface double en réunissant les petits côtés d'une bande de papier, de manière à séparer les angles qui seraient réunis si l'on voulait obtenir une surface cylindrique.

Du fait que le plan est une surface double résulte la propriété suivante :

Si l'extrémité d'un stylet décrit une ligne droite du plan dans toute son étendue, le stylet, revenu au point de départ, sera du côté du plan opposé à celui où il se trouvait au départ.

Mais on peut interpréter autrement les propriétés projectives.

Rien n'empêche de concevoir, comme nous l'avons déjà mentionné, que chaque système de valeurs des coordonnées projectives représente deux points de l'espace, savoir celui de la conception habituelle, et un autre situé au delà de l'infini euclidien.

Dans cette dernière conception de l'espace, le plan serait une surface fermée simple et à simple connexité, et deux lignes droites situées dans un même plan se couperaient en deux points, dont l'un situé au delà de l'infini euclidien.

On voit que des conceptions diverses de l'espace peuvent correspondre à la même forme analytique.

Dissociation des idées d'espace et d'infini. — Les propriétés projectives des figures doivent être les mêmes pour toutes les Géométries métriques que nous avons étudiées, puisque les lignes droites et les plans de ces Géométries sont les mêmes lignes de l'espace ; les considérations que nous venons de développer sont donc communes à ces Géométries.

En se bornant aux deux formes d'espace envisagées ci-dessus, la ligne droite est une ligne fermée et le plan, une surface fermée. Ces conceptions de la droite et du plan, quoique d'origine projective, doivent évidemment s'accorder avec la conception euclidienne et par suite, en dépit de l'intuition vulgaire, l'idée de l'infini doit être compatible avec celle d'une ligne et d'une surface fermées. Il faut donc franchement nier cette incompatibilité qui n'est qu'apparente.

La difficulté d'obtenir une représentation visuelle d'un fait ne nous paraît pas être une objection contre la réalité de ce fait.

Quand nous nous représentons la sphéricité de la terre, ce n'est pas avec des images de faits terrestres, telles que les impressions d'un voyageur qui parcourrait un méridien, mais bien avec l'image d'une boule de petites dimensions.

Nous interprétons un fait nouveau pour nous au moyen des images antérieurement acquises par notre esprit, et cela n'est pas toujours possible.

D'ailleurs quelles images visuelles correspondent à l'idée de l'infini euclidien ?

Ce point à l'infini sur une droite, qui coïncide avec celui vers lequel on tend en s'éloignant dans l'autre sens ; ce plan de l'infini, que l'on rencontre en prenant n'importe quelle direction, ne sont pas plus concevables en somme qu'une idée de l'espace privée de celle de l'infini en tant que propriété intrinsèque.

Résultant uniquement de la nature du mouvement au moyen duquel on suppose l'espace parcouru, l'idée de l'infini doit être séparée non seulement de l'idée d'espace, mais encore de celle des lignes que nous qualifions d'infinies ; on peut même la faire disparaître totalement moyennant une modification de la notion de distance.

N'est-il pas naturel d'ailleurs que l'idée de l'infini, qui n'est autre que celle d'une opération indéfiniment répétée ou continuée, soit liée à la nature de cette opération elle-même ?

D'ailleurs cette idée, ainsi que l'idée parente d'infiniment petit, constituent-t-elles, dans la science mathématique, autre chose que des procédés analytiques, remarquablement féconds, permettant de déduire de certaines propriétés particulières, tenues pour exactes dans un domaine déterminé, d'autres propriétés valables seulement pour ce domaine, mais procédés impuissants, comme l'analyse mathématique elle-même, à fournir des idées légitimes sur les propriétés particulières d'un autre domaine, auquel peuvent ne pas être applicables les idées que cette analyse a prises comme point de départ ?

C'est ainsi qu'il serait vain de vouloir, au moyen de l'analyse infinitésimale et sans autres expériences que celles qui s'appliquent aux corps de dimensions ordinaires, se faire des idées sur la constitution intime de ces corps et sur les propriétés des particules présentant des dimensions d'un autre ordre de grandeur.

A plus forte raison, les idées de l'infini et de l'infiniment petit, qui sont d'origine mathématique, ne sauraient répondre à aucune propriété intrinsèque d'un concept figuré.

L'idée de l'infini n'est donc pas inhérente à celle d'espace ; cette dernière peut être en effet séparée de celle de détermination métrique, et par suite de celle de l'infini, qui peut en résulter. En particulier, celle-ci peut être exclue de la Géométrie projective et à plus forte raison de l'*Analysis situs*.

Ce n'est pas seulement relativement à l'infini que l'on a doté l'idée d'espace de propriétés intrinsèques qu'elle ne comporte pas.

Que penser des idées illusoires de *forme*, *nature*, *structure* de l'espace, notions inconsistantes, qu'il convient d'abandonner aux métaphysiciens, lesquels semblent se complaire, en mauvais architectes, à construire des édifices d'autant plus élevés que les fondements en sont plus précaires ?

Le mot *espace* doit perdre sa prétentieuse importance pour devenir l'expression vague de la faculté que nous avons de localiser les objets ou, ce qui revient au même, de la propriété qu'ont les objets d'être localisés.

(*A suivre.*) G. COMBEBIAC (Limoges).