Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1903)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ESPACE EST-IL EUCLIDIEN?
Kapitel: I Aperçu historique.
Autor: Combebiac, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6629

L'ESPACE EST-IL EUCLIDIEN?

La question des Géométries, où se rencontrent à titre égal la Mathématique et la Psychologie ou plutôt la science appelée par les Allemands la *Théorie de la connaissance*, partage avec les questions métaphysiques cette particularité, que la difficulté consiste surtout à en déterminer la signification précise.

Nous nous proposons de faire un exposé d'ensemble de la question, en nous attachant à l'examen de certains points, dont l'obscurité, exploitée par l'ignorance mathématique, a permis la production d'un flot abondant de sophismes.

I

Aperçu historique.

Le meilleur moyen d'aborder une question obscure ou obscurcie consiste à en faire un exposé historique.

C'est ce que nous allons faire brièvement, en nous efforçant surtout de dégager l'unité de l'œuvre accomplie par les illustres Géomètres dont nous rencontrerons les noms.

Principes de la géométrie. — Si l'on examine avec quelque attention les démonstrations des théorèmes fondamentaux de la Géométrie, on découvre bientôt qu'elles sont essentiellement basées sur les propriétés des déplacements sans déformation, fait fondamental que les traités élémentaires ont peut-être le tort de ne pas mettre nettement en lumière.

Les propriétés primordiales de ces déplacements constituent donc les vrais axiomes de la Géométrie, et les éléments mis en œuvre dans cette science sont ceux dont la notion est intimement liée à celle de ces déplacements ou, d'une manière plus précise, est invariante dans ces déplacements : un point reste un point, une ligne reste une ligne, une surface reste une surface ; l'égalité, la perpendicularité se conservent, etc.

Ce fait capital s'exprime en disant que *la Géométrie est la théorie des propriétés invariantes dans les déplacements sans déformation.*

Enonçons les propriétés fondamentales des déplacements sans déformation sans trop nous préoccuper des doubles emplois possibles.

L'égalité des figures étant définie par leur superposabilité, c'est-à-dire par la coïncidence au moyen de déplacements sans déformation, la proposition : *deux figures égales à une troisième sont égales entre elles*, exprime que le résultat de deux déplacements opérés successivement peut être obtenu par un seul déplacement, autrement dit que les déplacements constituent un *groupe* d'opérations.

On peut toujours déplacer une figure de manière à amener un de ses points en un point quelconque de l'espace (*transitivité* du groupe).

Si l'on fixe deux points A et B d'une figure, un déplacement continu est encore possible, dans lequel demeurent fixes tous les points d'une ligne passant par les points A et B. On définit ainsi une catégorie de lignes (lignes droites), dans laquelle chacune est déterminée par la connaissance de deux de ses points.

Qu'entend-on par Géométrie non-euclidienne ?

On sait qu'un des axiomes de la Géométrie occupe une place à part dans cette science, c'est le postulat des parallèles, connu aussi sous la désignation, plus ou moins légitime, de XI^e axiome d'Euclide et ainsi énoncé par Euclide :

« Lorsque deux droites sont rencontrées par une troisième, de manière que la somme des angles internes situés d'un même côté de cette dernière soit inférieure à deux angles droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se coupent du côté où se trouvent ces deux angles (1). »

(1) « Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθεῖασ εὐθεῖα ἐμπιπῖουσα τας ἐντός καὶ ἐπὶ τά αὐτά μέρη γωνῖας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομενας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ἄπειρον συμπεπτειν, ἐφ ἅ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δυο ὀρθῶν ἐλάσσονες. »

Il résulte de là que, si par un point O extérieur à une droite D, on lui mène une perpendiculaire et à celle-ci également une perpendiculaire, cette dernière est la seule droite menée par le point O qui puisse ne pas rencontrer la droite D, et elle ne la rencontrera pas en effet, si l'on ajoute l'hypothèse que par un point *quelconque*, on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une ligne droite.

Travaux divers. — De nombreux efforts ont été faits et sont faits encore pour *démontrer* le postulat des parallèles. Ce qui va suivre montrera clairement la vanité de ces recherches.

Encouragés et sans doute guidés par Gauss, le Russe Lobatchewski (1829) et le Hongrois Bolyai (1832) parvinrent, chacun de son côté, à édifier synthétiquement une Géométrie parfaitement conséquente avec elle-même en laissant de côté cet axiome et en admettant au contraire que l'on peut, par un point extérieur à une droite, lui mener une infinité de parallèles comprises dans un certain angle.

Il semble que Gauss fût déjà parvenu à des résultats analogues dans des recherches qui ne furent publiées que beaucoup plus tard.

Riemann (1854), traitant la question analytiquement, fonda la Géométrie sur la notion de distance généralisée, ou plutôt sur l'expression de l'élément linéaire.

Il parvint ainsi, non seulement à la Géométrie de Lobatchewski-Bolyai, dans laquelle la ligne droite a un segment à l'infini, mais encore à une Géométrie dans laquelle la ligne droite n'a pas de points à l'infini.

Cayley (1859) généralisa également l'idée de distance, d'une manière moins abstraite, en la fondant sur des propriétés projectives.

Nous désignerons, avec Beltrami et Helmoltz, sous le nom de *Géométrie sphérique*, celle de Riemann, et sous le nom de *Géométrie pseudo-sphérique*, celle de Lobatchewski-Bolyai. On distingue aussi ces diverses Géométries au moyen des qualificatifs d'*hyperbolique* (Lobatchewski), *elliptique* (Riemann) et *parabolique* (euclidienne).

On doit aussi citer, dans le même ordre de recherches, les remarquables travaux de Beltrami sur les surfaces à courbure constante.

Les recherches de Riemann étant basées sur les propriétés d'une expression différentielle, ne se prêtaient pas à l'établissement d'un système d'axiomes pouvant servir de base à la Géométrie.

Helmoltz (1868) (¹) s'efforça d'énoncer nettement les axiomes communs à la Géométrie euclidienne et aux Géométries non-euclidiennes, c'est-à-dire les propriétés des déplacements d'où peuvent être déduites toutes les propriétés indépendantes du postulat des parallèles.

Axiomes de Sophus Lie. — Sophus Lie (1890) (²), utilisant ses admirables travaux sur les groupes de transformations, montra que les déductions d'Helmoltz se trouvaient, en certains points, erronées, que son système d'axiomes présentait à la fois des insuffisances et des superfluités, et enfin établit, d'une manière qui paraît cette fois définitive, les propriétés des déplacements pouvant donner lieu indifféremment aux Géométries euclidienne et non-euclidienne, et pas à d'autres.

Les principes posés par Lie, pas plus que ceux d'Helmoltz, ne s'expriment pas avec toute la simplicité désirable dans le langage de la Géométrie constructive.

Lie a énoncé deux systèmes équivalents de principes, présentant deux propositions communes, savoir :

I. *L'espace est une variété à trois dimensions.* — La première partie de cette proposition constitue moins l'énoncé d'une propriété qu'une définition donnant au mot *espace* une signification précise : l'ensemble des points.

II. *Les déplacements sans déformation forment un groupe réel et continu.* — Dire que les déplacements forment un groupe, c'est dire que deux figures égales, c'est-à-dire superposables à une troisième, sont égales entre elles.

(¹) Helmoltz, Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen ; Göttinger Nachrichten, 1868 ; Wissenschaftliche Abhandlungen, 2er Bd, S. 618 ; Barth, Leipzig. Traduit en français par Hoüel ; Hermann, Paris.

(²) Sophus Lie, Leipziger Berichte, 1890 ; *Théorie der Transformationsgruppen* 3er Abschnitt, S. 393 ; Teubner, Leipzig.

Dans un premier système d'axiomes, Lie complète ces deux propositions par la suivante :

III. *Le groupe des déplacements présente la propriété de la libre mobilité (freie Beweglichkeit) dans l'infinitésimal*, en entendant par là que, un point étant maintenu fixe, ainsi qu'un élément linéaire passant par ce point, un déplacement continu est encore possible, mais que tout déplacement devient impossible, si l'on fixe en outre un élément superficiel contenant cet élément linéaire.

Cette proposition pourrait, me semble-t-il, être remplacée par la suivante, qui a une signification constructive :

On peut toujours fixer un point quelconque, ainsi qu'un autre suffisamment voisin du premier, de manière qu'un déplacement continu soit encore possible ; mais on rend tout déplacement impossible en fixant un nouveau point convenablement choisi sur une surface quelconque passant par les deux premiers points.

Dans un second système d'axiomes donné par Lie, l'axiome de la *libre mobilité* est remplacé par deux autres, que nous traduirons, dans le langage de la Géométrie constructive, de la manière suivante :

1° *Si l'on maintient fixe un point quelconque, tous les points susceptibles d'être atteints par un autre point quelconque sont situés sur une surface contenant le second point et ne contenant pas le premier;*

2° *Autour du point fixe il existe un domaine triplement étendu et de dimensions finies, dans lequel tout point peut atteindre, par un déplacement continu, tout autre point situé sur la surface correspondante, définie ci-dessus.*

Chacun des deux systèmes d'axiomes de Lie exprime des propriétés appartenant à tout groupe continu de transformations projectives conservant une quadrique, ordinaire ou dégénérée en une courbe plane, à condition toutefois de se limiter à un domaine convenablement choisi.

Bien plus, il s'applique à tout groupe semblable à un de ces groupes, c'est-à-dire à tout groupe obtenu par une transformation générale opérée sur les variables, et il ne s'applique qu'à de tels groupes.

Telle est la proposition démontrée par Sophus Lie en se basant sur les propriétés, découvertes par lui-même, des groupes de transformations.

Il résulte de là que, si l'on appelle « point » l'ensemble de trois coordonnées, et « déplacements sans déformation », les transformations de l'un des groupes ainsi définis, on pourra établir, par rapport à ce groupe, des définitions et des propriétés correspondantes à celles de la Géométrie où n'intervient pas le postulat des parallèles.

Quant à ce postulat, il devra être remplacé par d'autres propositions convenablement choisies suivant le groupe pris pour base.

Enfin nous citerons les ouvrages de M. Klein [1] (1889-90) sur la Géométrie non-euclidienne, où l'on trouvera, en plus d'un bel exposé des travaux indiqués ci-dessus (sauf ceux de Lie), des résultats personnels du plus haut intérêt, notamment sur les diverses formes d'espace susceptibles de correspondre à une même détermination métrique.

Des travaux illustres que nous venons d'énumérer résulte sans conteste la possibilité d'établir, en écartant le postulat des parallèles, des Géométries conséquentes avec elles-mêmes et, par suite, l'impossibilité de démontrer ce postulat en s'appuyant sur les autres axiomes.

D'ailleurs, un simple regard jeté sur une surface sphérique montre qu'on y peut réaliser une Géométrie satisfaisant, à l'intérieur d'un domaine convenablement limité, aux axiomes d'Euclide, à l'exception du postulat des parallèles.

II

Les Géométries et leurs relations.

Différentes Géométries. — Nous allons étudier d'un peu plus près les différentes Géométries et les relations que l'on peut établir entre elles.

---

(1) Klein. *Nicht-Euclidische Geometrie Vorlesungen*, ausgearbertet von Fr. Schilling, Gottingen, 1893.