ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME INVARIABLE A TROIS DIMENSIONS Σ QUI PASSE D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE D'UNE POSITION DONNÉE Σ_1 A UNE AUTRE POSITION DONNÉE Σ_2

Autor(en): **Kraft, Ferdinand**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6630

ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT

D'UN SYSTÈME INVARIABLE A TROIS DIMENSIONS Σ QUI PASSE D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE D'UNE POSITION DONNÉE Σ_1 A UNE AUTRE POSITION DONNÉE Σ_2

---

§ 1. — Soient ABCU, $A_1B_1C_1U_1$ et $A_2B_2C_2U_2$ des pyramides homologues appartenant respectivement aux systèmes Σ, Σ_1 et Σ_2; ce sont, en raison de l'invariabilité du système Σ, des pyramides congruentes.

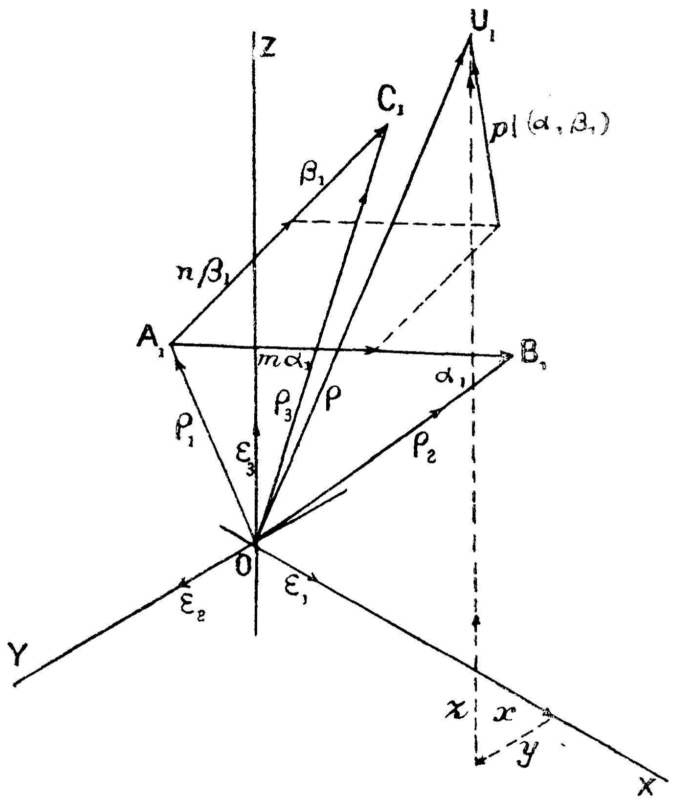

Fig. 1.

Prenons un point fixe O de l'espace pour origine des rayons vecteurs des points des systèmes Σ, Σ_1 et Σ_2. Soient donnés dans les systèmes Σ, Σ_1 et Σ_2 les points respectivement homologues A, B, C; A_1, B_1, C_1 et A_2, B_2, C_2, avec (ABC) $\neq$ o. Soit U un point arbitraire, variable, de Σ, de manière que U_1 et U_2 soient respectivement les points correspondants de Σ_1 et Σ_2, avec la condition

$$(ABCU) \neq o.$$

Si nous posons (fig. 1) $\overline{A_1B_1} = \alpha_1$, $\overline{A_1C_1} = \beta_1$, $A_1 = O + \rho_1$, $B_1 = O + \rho_2$, $C_1 = O + \rho_3$, $U_1 = O + \rho$, l'équation du système ponctuel Σ_1 ou U_1 sera

$$\rho = \rho_1 + m\alpha_1 + n\beta_1 + p \, \mathrm{l}\,(\alpha_1\beta_1).$$

ou encore

$$\rho = \rho_1 + m(\rho_2 - \rho_1) + n(\rho_3 - \rho_1) + p \mid [(\rho_2 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_1)],$$

où m, n et p sont des variables numériques, indépendantes l'une de l'autre.

Si le système Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, les points A, B, C et U subissent les déplacements totaux

$$\overline{A_1A_2} = \delta_1, \ \overline{B_1B_2} = \delta_2, \ \overline{C_1C_2} = \delta_3, \ \overline{U_1U_2} = \delta,$$

de manière qu'il existe pour le système ponctuel Σ_2, si l'on pose $U_2 = O + \psi$, la relation

$$\psi = \rho + \delta = \rho_1 + \delta_1 + m(\rho_2 + \delta_2 - \rho_1 - \delta_1) + n(\rho_3 + \delta_3 - \rho_1 - \delta_1) \\ + p \mid [(\rho_2 + \delta_2 - \rho_1 - \delta_1)(\rho_3 + \delta_3 - \rho_1 - \delta_1)],$$

ou

$$\psi = \rho_1 + m(\rho_2 - \rho_1) + n(\rho_3 - \rho_1) + p \mid [(\rho_2 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_1)] \\ + \delta_1 + m(\delta_2 - \delta_1) + n(\delta_3 - \delta_1) + p \mid [(\rho_2 - \rho_1)(\delta_3 - \delta_1) \\ - (\rho_3 - \rho_1)(\delta_2 - \delta_1) + (\delta_2 - \delta_1)(\delta_3 - \delta_1)],$$

ou, moyennant $(\delta_2 - \delta_1) = \delta_\alpha$, $(\delta_3 - \delta_1) = \delta_\beta$,

$$\psi = \rho + \delta = \rho_1 + m\alpha_1 + n\beta_1 + p \mid (\alpha_1\beta_1) \\ + \delta_1 + m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p \mid [\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta]$$

et, si nous posons

$$[(\rho_2 + \delta_2) - (\rho_1 + \delta_1)] = \overline{A_2B_2} = \alpha_2, \ [(\rho_3 + \delta_3) - (\rho_1 + \delta_1)] = \overline{A_2C_2} = \beta_2,$$

l'équation polaire du système ponctuel Σ_2 est encore

$$\psi = \rho + \delta_1 + m\alpha_2 + n\beta_2 + p \mid (\alpha_2\beta_2).$$

On en déduit pour le déplacement total du point variable U du système Σ

$$\delta = (\psi - \rho) = \delta_1 + m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p \mid [\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta].$$

« Les déplacements totaux de quatre points et plus du système Σ ne sont pas indépendants. Les déplacements totaux de tous les points U du système Σ sont déterminés, lorsque ceux de trois points du système non situé en ligne droite sont connus, le système Σ est passé de la position Σ_1 à la position Σ_2, lorsque trois points de Σ non situés en ligne droite, qui coïncidant auparavant avec les points correspondants de Σ_1, coïncident avec les points homologues de Σ_2 ».

En prenant ∂ comme radius vector, la dernière équation est celle de l'hodographe des déplacements totaux des points du système Σ.

La multiplication de cette équation par $(\partial_\alpha \partial_\beta)$ donne

$$(\partial - \partial_1)(\partial_\alpha \partial_\beta) = p \,|\, [\alpha_1 \partial_\beta - \beta_1 \partial_\alpha + \partial_\alpha \partial_\beta]\,(\partial_\alpha \partial_\beta).$$

Présentement nous avons

$$\begin{aligned}
&|\alpha_1 \partial_\beta - \beta_1 \partial_\alpha + \partial_\alpha \partial_\beta] \,|\, (\partial_\alpha \partial_\beta) = (\alpha_1 \partial_\beta) \,|\, (\partial_\alpha \partial_\beta) - (\beta_1 \partial_\alpha) \,|\, (\partial_\alpha \partial_\beta) + (\partial_\alpha \partial_\beta)^2 \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_1 | \partial_\alpha & \partial_\beta | \partial_\alpha \\ \alpha_1 | \partial_\beta & \partial_\beta | \partial_\beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \beta_1 | \partial_\alpha & \partial_\alpha | \partial_\alpha \\ \beta_1 | \partial_\beta & \partial_\alpha | \partial_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial_\alpha | \partial_\alpha & \partial_\beta | \partial_\alpha \\ \partial_\alpha | \partial_\beta & \partial_\beta | \partial_\beta \end{vmatrix} \\
&= (\alpha_1 | \partial_\alpha)\partial_\beta^2 - (\alpha_1 | \partial_\beta)(\partial_\alpha | \partial_\beta) - (\beta_1 | \partial_\alpha)(\partial_\alpha | \partial_\beta) + (\beta_1 | \partial_\beta)\partial_\alpha^2 + \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 - (\partial_\alpha | \partial_\beta)^2 \\
&= \{ (\alpha_1 | \partial_\alpha)\partial_\beta^2 + (\beta_1 | \partial_\beta)\partial_\alpha^2 + \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 \} - (\partial_\alpha | \partial_\beta) \{ \alpha_1 | \partial_\beta + \beta_1 | \partial_\alpha + \partial_\alpha | \partial_\beta \} \\
&= -(\partial_\alpha | \partial_\beta) \{ \alpha_1 | \partial_\beta + (\beta_2 - \partial_\beta) | \partial_\alpha + \partial_\alpha | \partial_\beta \} \\
&= -(\partial_\alpha | \partial_\beta) \{ \alpha_1 | \partial_\beta + \beta_2 | \partial_\alpha - \partial_\alpha | \partial_\beta + \partial_\alpha | \partial_\beta \} \\
&= -(\partial_\alpha | \partial_\beta) \{ \alpha_1 | \partial_\beta + \beta_2 | \partial_\alpha \} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

par suite

$$|\, [\alpha_1 \partial_\beta - \beta_1 \partial_\alpha + \partial_\alpha \partial_\beta]\,(\partial_\alpha \partial_\beta) = 0.$$

Nous obtenons ainsi

$$\lceil (\partial - \partial_1)(\partial_\alpha \partial_\beta) \rfloor = 0.$$

« L'hodographe des déplacements totaux des points du système Σ est un plan parallèle aux différences des déplacements totaux des extrémités des segments α et β ».

Déduisant de la première équation de cet hodographe les déplacements totaux de trois autres points coplanaires du système et développant avec ces déplacements l'équation de l'hodographe, nous obtenons de nouveau le même hodographe.

« L'hodographe des déplacements totaux des points d'un système indéformable Σ, lorsque celui-ci passe, de toutes les manières possibles, d'une position Σ_1 à une autre position Σ_2, est constamment un plan ».

Nous pouvons encore écrire

$$\partial(\partial_2 \partial_3 + \partial_3 \partial_1 + \partial_1 \partial_2) = \partial_1 \partial_2 \partial_3.$$

En prenant δ_1, δ_2 et δ_3 comme vecteurs de l'hodographe, le plan de cet hodographe passe par les extrémités de ces vecteurs.

Si nous transportons les déplacements δ_1, δ_2, δ_3 des points A, B, C en l'espace de manière que leurs origines coïncident avec le même point O_1 de l'espace, le plan déterminé par leurs extrémités D_1, D_2, D_3 (fig. 2) est le plan de l'hodographe du système des déplacements, O_1 étant le pôle de l'hodographe, car on a $(D_2 - D_1) = \delta_\alpha$, $(D_3 - D_1) = \delta_\beta$, et l'équation de ce plan est

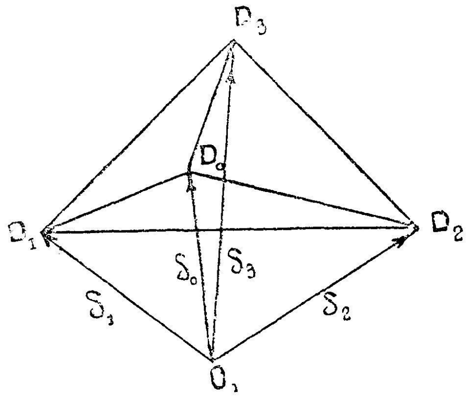

Fig. 2.

$$(\delta - \delta_1)(\delta_\alpha \delta_\beta) = 0.$$

Le vecteur

$$\mu = |[\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha + \delta_\alpha \delta_\beta]$$

est, parce que $(\mu \delta_\alpha \delta_\beta) = 0$, parallèle au plan de l'hodographe et est une somme de multiples de δ_α et δ_β, de sorte que nous pouvons poser

$$\mu = x\delta_\alpha + y\delta_\beta = |[\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha + \delta_\alpha \delta_\beta].$$

Si ε désigne le vecteur déterminant la position du plan de l'hodographe, on a

$$\varepsilon = [|(\delta_\alpha \delta_\beta)] : \sqrt{(\delta_\alpha \delta_\beta)^2},$$

et la multiplication de l'équation précédente par ε donne

$$x(\varepsilon \delta_\alpha) + y(\varepsilon \delta_\beta) = \varepsilon | [\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha].$$

De cette équation résultent, par les valeurs des coëfficients x et y,

$$x(\delta_\beta \varepsilon \delta_\alpha) = (\delta_\beta \varepsilon) | [\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha],$$
$$y(\delta_\alpha \varepsilon \delta_\beta) = (\delta_\alpha \varepsilon) | [\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha],$$

de sorte que moyennant ces valeurs de x et y, on a

$$\mu = \frac{(\delta_\beta \varepsilon) | [\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha]}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta} \delta_\alpha + \frac{(\varepsilon \delta_\alpha) | [\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha]}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta} \delta_\beta.$$

Mais nous avons

$$
\begin{aligned}
(\delta_3\varepsilon) \,|\, [\alpha_1\delta_3 - \beta_1\delta_\alpha] &= (\delta_3\varepsilon) \,|\, (\alpha_1\delta_3) - (\delta_3\varepsilon) \,|\, (\beta_1\delta_\alpha) \\
&= \begin{vmatrix} \delta_3 | \alpha_1 & \varepsilon | \alpha_1 \\ \delta_3 | \delta_3 & \varepsilon | \delta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_3 | \beta_1 & \varepsilon | \beta_1 \\ \delta_3 | \delta_\alpha & \varepsilon | \delta_\alpha \end{vmatrix} \\
&= (\varepsilon | \beta_1)(\delta_\alpha | \delta_3) - (\varepsilon | \alpha_1)\delta_3^2. \\
(\varepsilon\delta_\alpha) \,|\, [\alpha_1\delta_3 - \beta_1\delta_\alpha] &= (\varepsilon\delta_\alpha) \,|\, (\alpha_1\delta_3) - (\varepsilon\delta_\alpha) \,|\, (\beta_1\delta_\alpha) \\
&= \begin{vmatrix} \varepsilon | \alpha_1 & \delta_\alpha | \alpha_1 \\ \varepsilon | \delta_3 & \delta_\alpha | \delta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon | \beta_1 & \delta_\alpha | \beta_1 \\ \varepsilon | \delta_\alpha & \delta_\alpha | \delta_\alpha \end{vmatrix} \\
&= (\varepsilon | \alpha_1)(\delta_\alpha | \delta_3) - (\varepsilon | \beta_1)\delta_\alpha^2,
\end{aligned}
$$

car δ_α et δ_3 sont rectangulaires avec ε, de sorte que nous obtenons encore

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_3} \left\{ [(\varepsilon | \beta_1)(\delta_\alpha | \delta_3) - (\varepsilon | \alpha_1)\delta_3^2]\,\delta_\alpha + [(\varepsilon | \alpha_1)(\delta_\alpha | \delta_3) - (\varepsilon | \beta_1)\delta_\alpha^2]\,\delta_3 \right\}.$$

Avec cette valeur de μ, l'équation de l'hodographe du système des déplacements peut maintenant s'écrire

$$
\begin{aligned}
\delta = \delta_1 &+ \left\{ m + \frac{p}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_3} [(\varepsilon | \beta_1)(\delta_\alpha | \delta_3) - (\varepsilon | \alpha_1)\delta_3^2] \right\} \delta_\alpha \\
&+ \left\{ n + \frac{p}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_3} [(\varepsilon | \alpha_1)(\delta_\alpha | \delta_3) - (\varepsilon | \beta_1)\delta_\alpha^2] \right\} \delta_3,
\end{aligned}
$$

formule au moyen de laquelle le déplacement δ d'un point quelconque du système Σ est représenté comme somme de multiples de trois déplacements donnés.

Moyennant la valeur de ε, l'équation de l'hodographe, en forme d'un produit, nous conduit à l'importante relation

$$(\delta - \delta_1) \,|\, \varepsilon = 0$$

ou

$$(\delta | \varepsilon) = (\delta_1 | \varepsilon).$$

« Les projections des déplacements totaux des points du système Σ sur la direction du vecteur de position du plan de l'hodographe sont égales entre elles ».

§ 1'. — Si les déplacements des points du système Σ sont infiniment petits, si $\delta_i = d\rho_i$, alors les équations de l'hodographe du système des déplacements sont

$$d\rho = d\rho_1 + m d\alpha + n d\beta + p \,|\, [\alpha d\beta - \beta d\alpha],$$

car $(d\alpha d\beta)$ peut ici être négligé vis-à-vis des autres quantités comme infiniment petit d'ordre supérieur et si les déplacements sont infiniment petits en posant $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\alpha_2 = \alpha + d\alpha$, $\beta_2 = \beta + d\beta$; de plus

$$d\rho = d\rho_1 + \left\{ m + \frac{p}{\varepsilon d\alpha d\beta} \left[(\varepsilon \mid \beta) (d\alpha \mid d\beta) - (\varepsilon \mid \alpha) d\beta^2 \right] \right\} d\alpha$$
$$+ \left\{ n + \frac{p}{\varepsilon d\alpha d\beta} \left[(\varepsilon \mid \alpha) (d\alpha \mid d\beta) - (\varepsilon \mid \beta) d\alpha^2 \right] \right\} d\beta ;$$
$$(d\rho - d\rho_1)(d\alpha d\beta) = 0 ;$$
$$(d\rho - d\rho_1) \mid \varepsilon = 0, \qquad d\rho \mid \varepsilon = d\rho_1 \mid \varepsilon, \qquad \varepsilon = [\mid (d\alpha d\beta)] : \sqrt{(d\alpha d\beta)^2}.$$

Nous obtenons ainsi, pour vitesses des points du système Σ,

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + m(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) + n(\bar{v}_3 - \bar{v}_1) + p \mid [\alpha(\bar{v}_3 - \bar{v}_1) - \beta(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)] ;$$
$$(\bar{v} - \bar{v}_1) \mid \varepsilon = 0, \qquad \varepsilon = \mid [(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)] : \sqrt{[(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)]^2},$$

et la formule donnant la vitesse $\bar{v}$, déduite de l'équation encore inutilisée des déplacements totaux infiniment petits, peut aussi être écrite directement.

Les dernières équations, en y prenant $\bar{v}$ comme radius vector, sont celles de l'hodographe des vitesses des points du système Σ, c'est un plan parallèle au plan de l'hodographe des déplacements.

§ 2. — Parmi les déplacements totaux des points du système Σ il en existe un qui est le plus petit il est égal à la perpendiculaire abaissée du pôle de l'hodographe, égal à la projection du déplacement total d'un point quelconque du système Σ sur la direction du vecteur ε.

Pour ce déplacement, que nous désignons par δ_0, existe la condition

$$\delta_0 = \delta_1 + m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p \mid [\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta]$$
$$= x \mid (\delta_\alpha\delta_\beta) = y\varepsilon = (\delta_1 \mid \varepsilon)\varepsilon.$$

Nous obtenons ainsi

$$\delta_1\delta_\alpha\delta_\beta = x(\delta_\alpha\delta_\beta)^2,$$

de sorte que

$$\delta_0 = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2} \mid (\delta_\alpha\delta_\beta) = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\sqrt{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2}}\, \varepsilon.$$

En multipliant l'équation de condition par ε, on obtient

$$(\varepsilon\delta_1) + m(\varepsilon\delta_\alpha) + n(\varepsilon\delta_\beta) + p\varepsilon \mid [\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha] = 0,$$

si nous multiplions cette équation d'abord par δ_β, ensuite par δ_α, il vient

$$(\delta_\beta \varepsilon \delta_1) + m(\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta) + p(\delta_\beta \varepsilon) \mid [\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha] = 0,$$
$$(\delta_\alpha \varepsilon \delta_1) + n(\delta_\alpha \varepsilon \delta_\beta) + p(\delta_\alpha \varepsilon) \mid [\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha] = 0,$$

d'où

$$m = \frac{\varepsilon \delta_3 \delta_1}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta} + p \frac{(\varepsilon \delta_\beta) \mid [\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha]}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta},$$
$$n = \frac{\varepsilon \delta_1 \delta_2}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta} - p \frac{(\varepsilon \delta_\alpha) \mid [\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha]}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta}.$$

Si nous substituons ces valeurs de m et de n dans l'équation qui donne δ en fonction des déplacements donnés, nous obtenons

$$\delta_0 = \delta_1 + \frac{\varepsilon \delta_3 \delta_1}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta} \delta_\alpha + \frac{\varepsilon \delta_1 \delta_2}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta} \delta_\beta,$$

ou

$$\delta_0 = \frac{1}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta} \left\{ (\varepsilon \delta_2 \delta_3) \delta_1 + (\varepsilon \delta_3 \delta_1) \delta_2 + (\varepsilon \delta_1 \delta_2) \delta_3 \right\},$$

équation par laquelle le déplacement minimum est déterminé en fonction des trois déplacements donnés.

§ 2'. — Si les déplacements totaux des points du système Σ sont infiniment petits, le déplacement minimum est évidemment

$$d\rho_0 = \frac{d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3}{\sqrt{(d\alpha d\beta)^2}} \varepsilon,$$

ou encore

$$d\rho_0 = \frac{1}{\varepsilon d\alpha d\beta} \left\{ (\varepsilon d\rho_2 d\rho_3) d\rho_1 + (\varepsilon d\rho_3 \, d\rho_1) d\rho_2 + (\varepsilon d\rho_1 \, d\rho_2) d\rho_3 \right\},$$

de sorte que la plus petite vitesse est

$$\bar{v}_0 = \frac{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3}{\sqrt{[(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)]^2}} \varepsilon,$$

ou

$$\bar{v}_0 = \frac{1}{\varepsilon (\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)} \left\{ (\varepsilon \bar{v}_2 \bar{v}_3) \bar{v}_1 + (\varepsilon \bar{v}_3 \bar{v}_1) \bar{v}_2 + (\varepsilon \bar{v}_1 \bar{v}_2) \bar{v}_3 \right\}.$$

§ 3. — Il s'agit maintenant de déterminer à quels points du système correspond le déplacement δ_0.

L'équation des radii vectores des points auxquels appartient le moindre déplacement s'obtiendra en substituant dans l'équation des radii vectores des points du système ponctuel Σ les valeurs de m et n trouvées dans le § 2, ce qui donne, en désignant par ρ_s le radius vector de ce lieu,

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\left\{(\varepsilon\delta_\beta\delta_1)\alpha_1 + (\varepsilon\delta_1\delta_2)\beta_1\right\}$$
$$+\frac{p}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\left\{[(\varepsilon\delta_\beta)\,|\,(\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha)]\alpha_1 + [(\delta_\alpha\varepsilon)\,|\,(\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha)]\beta_1 + (\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta)\,|\,(\alpha_1\beta_1)\right\}.$$

Ce lieu est donc une ligne droite, qui est parallèle au vecteur

$$\nu = [(\varepsilon\delta_\beta)\,|\,(\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha)]\alpha_1 + [(\delta_\alpha\varepsilon)\,|\,(\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha)]\beta_1 + (\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta)\,|\,(\alpha_1\beta_1).$$

Si a désigne l'angle que cette droite fait avec la direction du vecteur de position ε du plan de l'hodographe, on a

$$\operatorname{tang} a = \sqrt{(\varepsilon\nu)^2} : (\varepsilon\,|\,\nu).$$

Quand nous usons d'abréviations, nous pouvons écrire

$$\nu = a\alpha_1 + b\beta_1 + c\,|\,(\alpha_1\beta_1),$$

d'où nous obtenons

$$(\varepsilon\nu) = a(\varepsilon\alpha_1) + b(\varepsilon\beta_1) + c[\varepsilon\,|\,(\alpha_1\beta_1)].$$

On a donc aussi

$$\begin{aligned}
|\,(\varepsilon\nu) &\equiv a[(\delta_\alpha\delta_\beta)\,|\,\alpha_1] + b[(\delta_\alpha\delta_\beta)\,|\,\beta_1] + c[(\delta_\alpha\delta_\beta)\,(\alpha_1\beta_1)],\\
|\,(\varepsilon\nu) &\equiv a[(\delta_\alpha\,|\,\alpha_1)\,\delta_\beta - (\delta_\beta\,|\,\alpha_1)\delta_\alpha] + b[(\delta_\alpha\,|\,\beta_1)\delta_\beta - (\delta_\beta\,|\,\beta_1)\delta_\alpha]\\
&\quad + c[(\delta_\alpha\alpha_1\beta_1)\delta_\beta - (\delta_\beta\alpha_1\beta_1)\delta_\alpha],\\
|\,(\varepsilon\nu) &\equiv [a(\delta_\alpha\,|\,\alpha_1) + b(\delta_\alpha\,|\,\beta_1) + c(\delta_\alpha\alpha_1\beta_1)]\delta_\beta\\
&\quad - [a(\delta_\beta\,|\,\alpha_1) + b(\delta_\beta\,|\,\beta_1) + c(\delta_\beta\alpha_1\beta_1)]\delta_\alpha,
\end{aligned}$$

ou en abrégé

$$|\,(\varepsilon\nu) \equiv r\delta_\beta + s\delta_\alpha.$$

Mais nous avons

$$a = (\varepsilon\,|\,\alpha_1)\delta_\beta^2 - (\varepsilon\,|\,\beta_1)(\delta_\alpha\,|\,\delta_\beta),\qquad b = (\varepsilon\,|\,\beta_1)\delta_\alpha^2 - (\varepsilon\,|\,\alpha_1)(\delta_\alpha\,|\,\delta_\beta),$$

$$\begin{aligned}
c(\delta_\alpha\alpha_1\beta_1) &= (\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta)\,(\delta_\alpha\alpha_1\beta_1)\\
&= \begin{vmatrix} \varepsilon\,|\,\delta_\alpha & \delta_\alpha\,|\,\delta_\alpha & \delta_\beta\,|\,\delta_\alpha \\ \varepsilon\,|\,\alpha_1 & \delta_\alpha\,|\,\alpha_1 & \delta_\beta\,|\,\alpha_1 \\ \varepsilon\,|\,\beta_1 & \delta_\alpha\,|\,\beta_1 & \delta_\beta\,|\,\beta_1 \end{vmatrix},\\
c(\delta_\alpha\alpha_1\beta_1) &= \delta_\alpha^2(\alpha_1\,|\,\delta_\beta)(\varepsilon\,|\,\beta_1) + (\varepsilon\,|\,\alpha_1)(\delta_\alpha\,|\,\delta_\beta)(\delta_\alpha\,|\,\beta_1)\\
&\quad - (\varepsilon\,|\,\beta_1)(\alpha_1\,|\,\delta_\alpha)(\delta_\alpha\,|\,\delta_\beta) - (\varepsilon\,|\,\alpha_1)(\beta_1\,|\,\delta_\beta)\delta_\alpha^2;\\
c(\delta_\beta\alpha_1\beta_1) &= (\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta)(\delta_\beta\alpha_1\beta_1)\\
&= \begin{vmatrix} \varepsilon\,|\,\delta_\beta & \delta_\alpha\,|\,\delta_\beta & \delta_\beta\,|\,\delta_\beta \\ \varepsilon\,|\,\alpha_1 & \delta_\alpha\,|\,\alpha_1 & \delta_\beta\,|\,\alpha_1 \\ \varepsilon\,|\,\beta_1 & \delta_\alpha\,|\,\beta_1 & \delta_\beta\,|\,\beta_1 \end{vmatrix},\\
c(\delta_\beta\alpha_1\beta_1) &= (\varepsilon\,|\,\beta_1)(\alpha_1\,|\,\delta_\beta)(\delta_\alpha\,|\,\delta_\beta) + (\varepsilon\,|\,\alpha_1)(\beta_1\,|\,\delta_\alpha)\delta_\beta^2\\
&\quad - (\varepsilon\,|\,\beta_1)(\alpha_1\,|\,\delta_\alpha)\delta_\beta^2 - (\varepsilon\,|\,\alpha_1)(\beta_1\,|\,\delta_\beta)(\delta_\alpha\,|\,\delta_\beta);
\end{aligned}$$

et c'est pourquoi

$$
\begin{aligned}
r = {} & \{ (\varepsilon|\alpha_1)\delta_\beta^2 - (\varepsilon|\beta_1)(\delta_\alpha|\delta_\beta) \} (\alpha_1|\delta_\alpha) + \{ (\varepsilon|\beta_1)\delta_\alpha^2 - (\varepsilon|\alpha_1)(\delta_\alpha|\delta_\beta) \} (\beta_1|\delta_\alpha) \\
& + (\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\delta_\beta)\delta_\alpha^2 + (\varepsilon|\alpha_1)(\beta_1|\delta_\alpha)(\delta_\alpha|\delta_\beta) - (\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\delta_\alpha)(\delta_\alpha|\delta_\beta) \\
& - (\varepsilon|\alpha_1)(\beta_1|\delta_\beta)\delta_\alpha^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r = {} & \{ (\varepsilon|\alpha_1)(\alpha_1|\delta_\alpha)\delta_\beta^2 - (\varepsilon|\alpha_1)(\beta_1|\delta_\beta)\delta_\alpha^2 \} + (\varepsilon|\beta_1)\delta_\alpha^2(\beta_1|\delta_\alpha - \alpha_1|\delta_\beta) \\
& - 2(\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\delta_\alpha)(\delta_\alpha|\delta_\beta),
\end{aligned}
$$

$$r = (\varepsilon|\beta_1)\delta_\alpha^2 \{ \beta_1|\delta_\alpha + \alpha_1|\delta_\beta \} - 2(\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\delta_\alpha)(\delta_\alpha|\delta_\beta),$$

$$r = (\varepsilon|\beta_1)\delta_\alpha^2 \{ \beta_1|\delta_\alpha + \alpha_2|\delta_\beta - \delta_\alpha|\delta_\beta \} - 2(\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\delta_\alpha)(\delta_\alpha|\delta_\beta),$$

$$r = -(\varepsilon|\beta_1)(\delta_\alpha|\delta_\beta)[(\alpha_2-\alpha_1)|\delta_\alpha] - 2(\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\delta_\alpha)(\delta_\alpha|\delta_\beta),$$

$$r = -(\varepsilon|\beta_1)(\delta_\alpha|\delta_\beta) \{ \alpha_2|\delta_\alpha + \alpha_1|\delta_\alpha \},$$

$$r = -(\varepsilon|\beta_1)(\delta_\alpha|\delta_\beta) \{ (\alpha_1+\alpha_2)|\delta_\alpha \},$$

$$r = 0;$$

de plus nous obtenons

$$
\begin{aligned}
-s = {} & \{ (\varepsilon|\alpha_1)\delta_\beta^2 - (\varepsilon|\beta_1)(\delta_\alpha|\delta_\beta) \} (\alpha_1|\delta_\beta) + \{ (\varepsilon|\beta_1)\delta_\alpha^2 - (\varepsilon|\alpha_1)(\delta_\alpha|\delta_\beta) \} (\beta_1|\delta_\beta) \\
& + (\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\delta_\beta)(\delta_\alpha|\delta_\beta) + (\varepsilon|\alpha_1)(\beta_1|\delta_\alpha)\delta_\beta^2 - (\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\delta_\alpha)\delta_\beta^2 \\
& - (\varepsilon|\alpha_1)(\beta_1|\delta_\beta)(\delta_\alpha|\delta_\beta),
\end{aligned}
$$

le second membre de cette équation peut être traité exactement de la même manière que le second membre de l'équation en r, ce qui donne

$$s = 0.$$

Nous obtenons ainsi

$$|(\varepsilon v) = 0, \qquad (\varepsilon v) = 0,$$

c'est-à-dire que le lieu des points dont le déplacement est δ_0 est une ligne droite parallèle à ce déplacement ainsi qu'au vecteur déterminant la position du plan de l'hodographe.

Pour $p = 0$, le radius vector de cette droite est égal à

$$\rho_1 + \frac{1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta} \{ (\varepsilon\delta_\beta\delta_1)\alpha_1 + (\varepsilon\delta_1\delta_2)\beta_1 \},$$

de sorte que l'équation du radius vector du lieu en question s'écrit dans la forme la plus simple

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta} \{ (\varepsilon\delta_\beta\delta_1)\alpha_1 + (\varepsilon\delta_1\delta_2)\beta_1 \} + u\varepsilon.$$

Dans le changement de position du système Σ, cette ligne, envisagée comme appartenant à ce système, se déplace sur elle-même, chacun de ses points subissant le déplacement δ_0. Deux droites homologues de Σ_1 et Σ_2 coïncident avec cette droite considérée comme ligne de l'espace absolu, elles constituent ainsi une ligne double de Σ_1 et Σ_2 sans points doubles, et lorsque $\delta_0 = 0$ une ligne de points doubles.

« Lorsque le système Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, Σ_1 et Σ_2 ont toujours une ligne double, qui n'a généralement pas de points doubles, les points de Σ situés sur cette droite subissent le plus petit déplacement qui est possible dans le changement de position de Σ ».

§ 3′. — Si les déplacements des points de Σ sont infiniment petits, l'équation du lieu des points de déplacement minimum est évidemment

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon d\alpha d\beta} \left\{ (\varepsilon d\rho_3 d\rho_1)\alpha + (\varepsilon d\rho_1 d\rho_2)\beta \right\} + u\varepsilon$$

ou encore

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon(\overline{v}_2 - \overline{v}_1)(\overline{v}_3 - \overline{v}_1)} \left\{ (\varepsilon \overline{v}_3 \overline{v}_1)\alpha + (\varepsilon \overline{v}_1 \overline{v}_2)\beta \right\} + u\varepsilon.$$

§ 4. — Vraisemblablement, les déplacements des points des droites du système Σ qui sont parallèles à la ligne double de Σ_1 et Σ_2, présentent des propriétés particulières.

L'équation d'une telle droite, parallèle à ε, s'écrit

$$\rho = \rho_1 + m_1\alpha_1 + n_1\beta_1 + u\varepsilon,$$

mais on a $\varepsilon \equiv (\delta_\alpha \delta_\beta)$, δ_α et δ_β sont des quantités invariables, donc $\delta\varepsilon = 0$, de sorte que

$$\delta = \delta_1 + m_1 \delta_\alpha + n_1 \delta_\beta :$$

comme le second membre de cette équation est une quantité constante, les déplacements des points de cette droite sont égaux entre eux.

« Les déplacements des points d'une droite du système Σ, parallèle au vecteur déterminant la position du plan de l'hodographe, de son système des déplacements (parallèle à la ligne double de Σ_1 et Σ_2) sont égaux entre eux et en général également inclinés sur cette droite ».

Cherchons, s'il existe des droites du système Σ qui soient parallèles au vecteur déterminant la position du plan de l'hodographe et dont les points soient déplacés parallèlement à ce vecteur.

L'équation d'une telle droite est

$$\rho = \rho_1 + m\alpha_1 + n\beta_1 + u\varepsilon,$$

le déplacement de ses points doit être donné par l'équation

$$\delta = \delta_1 + m\delta\alpha + n\delta_\beta = x\varepsilon$$

d'où résulte

$$\varepsilon\delta_\beta\delta_1 + m(\varepsilon\delta_\beta\delta_\alpha) = 0, \qquad \varepsilon\delta_\alpha\delta_1 + n(\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta) = 0.$$

Ces équations donnent pour m et n des valeurs réelles, qui n'ont qu'une seule signification, en les portant dans les équations donnant ρ et δ, nous obtenons

$$\rho = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\left\{(\varepsilon\delta_\beta\delta_1)\alpha_1 + (\varepsilon\delta_1\delta_2)\beta_1\right\} + u\varepsilon,$$

$$\delta = \delta_1 + \frac{1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\left\{(\varepsilon\delta_\beta\delta_1)\delta_\alpha + (\varepsilon\delta_1\delta_2)\delta_\beta\right\} = \delta_0.$$

Il n'y a donc qu'une telle droite, les déplacements de ses points sont égaux au déplacement minimum possible, et cette droite coïncide avec la ligne double de Σ_1 et Σ_2.

Nous sommes ainsi parvenus indirectement à l'équation de la ligne double de Σ_1 et Σ_2 sans nous être engagés dans un calcul plus long que pour la détermination de sa direction.

« Les points d'une droite $\bar{\mu}$ de Σ parallèle à la ligne double $\bar{\mu}^0$ de Σ_1 et Σ_2 subissent le même déplacement, la projection de ce déplacement sur la direction de la droite est égale au déplacement δ_0, lorsque Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2. Si nous déterminons dans le système Σ des sections planes, normales à $\bar{\mu}_0$ c'est-à-dire à ε, ces sections planes constituent des systèmes partiels congruents de Σ, les points correspondants de ces sections c'est-à-dire les points situés sur la même droite $\bar{\mu}$, ont le même déplacement; il en résulte que les déplacements de ses sections planes, lorsque Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, sont égaux entre eux ».

§ 4'. — Lorsque les déplacements des points de Σ sont infiniment petits, le déplacement des points d'une droite $\overline{\mu}$ est

$$d\rho = d\rho_1 + m_1 d\alpha + n_1 d\beta,$$

leur vitesse

$$\overline{v} = \overline{v}_1 + m_1(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) + n_1(\overline{v}_3 - \overline{v}_1),$$

et l'équation de la droite du système Σ ayant le déplacement $d\rho_0$ est la même qu'au § 3'.

§ 5. — Nous allons maintenant nous appliquer à la recherche des mouvements simples, par lesquels le système invariable Σ peut parvenir d'une position donnée Σ_1 à une autre position Σ_2 et à la détermination la plus simple de ces mouvements. Pour cela partons des cas spéciaux, que nous résoudrons directement. Le cas où l'on a $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, ne donne lieu à aucune considération, puisque l'on a alors $\delta = 0$, le système Σ n'a alors aucun déplacement.

Soit premièrement $\delta_1 = \delta_2 = 0$, de sorte que les points A et B de Σ ne soient pas déplacés.

Alors $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$ sont des points doubles de Σ_1 et Σ_2 la droite $A_1B_1 = A_2B_2$ est une ligne double de Σ_1 et Σ_2 n'ayant que des points doubles.

L'équation de l'hodographe des déplacements des points de Σ est maintenant

$$\delta = n\,\delta_3 + p\,|(\alpha_1\delta_3).$$

Pour d'autres points qui n'auraient pas de déplacements on a la condition

$$\delta = n\delta_3 + p\,|(\alpha_1\delta_3) = 0,$$

d'où il résulte, δ_3 et $|(\alpha_1\delta_3)$ étant des vecteurs non parallèles,

$$n = 0, \qquad p = 0.$$

valeurs qui, substituées dans l'équation du système ponctuel Σ, donnent

$$\rho = \rho_1 + m\alpha_1,$$

qui est l'équation de la ligne double de Σ_1 et Σ_2, laquelle aurait pu être écrite directement en raison de $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$. Il n'existe pas d'autres points sans déplacement.

Comme l'on a, dans le cas général

$$\alpha_1 | \delta_\beta + \beta_2 | \delta_\alpha = 0,$$

on a maintenant

$$\alpha_1 | \delta_3 = 0,$$

d'où on déduit, en multipliant par α_1 l'équation de l'hodographe,

$$\alpha_1 | \delta = 0,$$

de sorte que les déplacements des points de Σ sont rectangulaires avec la ligne double.

Pour le déplacement minimum on a

$$\delta_0 = (\delta_1 | \varepsilon)\varepsilon = 0, \qquad \varepsilon = (\alpha_1 : \sqrt{\alpha_1^2}),$$

mais, si l'on a $\delta = 0$, on a $n = p = 0$ et il en résulte que le lieu des points sans déplacement est la droite $AB = A_1B_1$ du système Σ.

L'équation d'une droite du système, dans Σ_1, parallèle à α_1 s'écrit

$$\rho = \rho_1 + c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 + u\alpha_1,$$

les déplacements des points de cette ligne sont

$$\delta = (c_1 + c_2)\delta_3 ;$$

ils sont égaux entre eux.

« S'il existe deux points du système Σ sans déplacement, la droite qui réunit ces points est sans déplacement. Les déplacemonts de tous les points du système sont normaux à cette ligne et directement proportionnels aux distances des points à la droite sans déplacement. Les déplacements des points qui appartiennent à une droite parallèle au lieu des points sans déplacement sont égaux entre eux ».

Comme $A_1B_1 = A_2B_2$ est une ligne double de Σ_1 et Σ_2 n'ayant que des points doubles, les points homologues de Σ_1 et Σ_2 sont également éloignés de chaque élément de cette ligne. Il en résulte, en tenant compte de la proposition précédente, que le système passe de la position Σ_1 à la position Σ_2 de la manière la plus simple par une rotation autour de la double ligne, l'amplitude de la rotation étant égale à l'angle de deux plans homologues de Σ_1 et Σ_2 se coupant sur la double ligne, ou encore égale à l'angle des perpendiculaires abaissées des points C_1 et C_2 sur la double ligne, où elles se rencontrent d'ailleurs.

Pour le déplacement du point C, nous obtenons ainsi

$$\beta_2 = (\varepsilon \mid \beta_1)\varepsilon + \cos w(\varepsilon\beta_1) \mid \varepsilon + \sin w \mid (\varepsilon\beta_1),$$
$$\delta_3 = \beta_2 - \beta_1 = (1 - \cos w)[(\beta_1 \mid \varepsilon)\varepsilon - \beta_1] + \sin w \mid (\varepsilon\beta_1).$$

Si nous posons

$$\beta_1 = b\varepsilon + \chi_1', \quad \beta_2 = b\varepsilon + \chi_2', \quad \varepsilon \mid \chi_1' = \varepsilon \mid \chi_2' = 0, \quad \chi_1'^2 = \chi_2'^2 = h_1'^2,$$

il vient

$$\chi_2' = \cos w \chi_1' + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1'),$$
$$\delta_3 = (\cos w - 1)\chi_1' + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1'),$$
$$2 \sin \frac{1}{2} w = (\sqrt{\delta_3^2} : h_1').$$

Nous obtenons maintenant pour un point quelconque U du système Σ, si χ_1 et χ_2 désignent les distances normales des points U_1 et U_2 à l'axe de rotation,

$$\chi_2 = \cos w \chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1),$$
$$\delta = \chi_2 - \chi_1 = (\cos w - 1)\chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1),$$

valeurs, par lesquelles le mouvement du système Σ est pleinement déterminé. Chaque point de Σ décrit, dans le passage de la position Σ_1 à la position Σ_2 par rotation autour de la ligne double de Σ_1 et Σ_2, un arc de cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, dont le centre est situé sur cet axe.

« Lorsqu'un système invariable Σ possède deux points sans déplacement, il a également une droite sans déplacement, savoir celle qui réunit les deux points ; le système Σ parvient de la position Σ_1 à la position Σ_2 de la manière la plus simple par une rotation autour de cette ligne comme axe, en prenant l'amplitude de la rotation égale à l'angle de deux plans homologues quelconques de Σ_1 et Σ_2 ».

§ 5'. — Si les déplacements des points de Σ sont infiniment petits, l'équation de l'hodographe des déplacements des points du système Σ est, en conséquence du § 5, si $d\rho_1 = 0$, $d\rho_2 = 0$,

$$d\rho = n d\rho_3 + p \mid (\alpha d\rho_3),$$

et, par suite, les vitesses de ses points sont

$$\bar{v} = n\bar{v}_3 + p \mid (\alpha\bar{v}_3) :$$

le lieu des points sans déplacement, c'est-à-dire sans vitesse, est donné par

$$\rho = \rho_1 + m\alpha.$$

L'angle de la rotation autour de la ligne double de Σ_1 et Σ_2 est

$$dw = \left(\sqrt{d\rho_3^2} : h_1'\right) = \left(ds_3 : h_1'\right),$$

et la vitesse angulaire du système Σ est alors

$$w = \left(v_3 : h_1'\right).$$

Pour un point quelconque U du système Σ nous avons

$$\chi_2 = \chi_1 + dw \mid (\varepsilon\chi_1),$$
$$d\rho = dw \mid (\varepsilon\chi_1), \quad \bar{v} = w \mid (\varepsilon\chi_1).$$

§ 6. — Nous considérons maintenant le cas où l'on a $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \delta_3$.

Alors le point A de Σ est sans déplacement, $A_1 = A_2$ est un point double de Σ_1 et Σ_2, et les déplacements des points B et C sont égaux entre eux.

L'équation de l'hodographe des déplacements des points de Σ s'écrit

$$\delta = (m+n)\delta_2 + p \mid [(\alpha_1 - \beta_1)\delta_2].$$

Pour le lieu des autres points pour lesquels on pouvait avoir $\delta = 0$, on doit avoir

$$m + n = 0, \qquad p = 0,$$

d'où il résulte, en vertu de l'équation du système ponctuel $\Sigma = \Sigma_1$,

$$\rho = \rho_1 + m(\alpha_1 - \beta_1).$$

Donc le lieu des points sans déplacement est une droite passant par le point $A_1 = A_2 = A$ et parallèle à la droite joignant les points B_1 et C_1 ; c'est une ligne double de Σ_1 et Σ_2 composée uniquement de points doubles.

Les déplacements des points B et C étant égaux, les déplacements des points de la droite AB sont à cause de cela égaux entre eux. Donc la double-ligne de Σ_1 et Σ_2 est parallèle à la droite B_1C_1 et le déplacement du point A étant égal à zéro, elle passe par le point $A_1 = A_2$ et est entièrement composée de points doubles, comme celà résulte directement de son équation.

D'une manière générale, on a

$$(\alpha_1 | \delta_\alpha)\delta_\beta^2 - (\beta_1 | \delta_\beta)\delta_\alpha^2 = 0,$$

d'où il résulte, pour notre cas spécial,

$$(\alpha_1 - \beta_1) | \delta_2 = 0,$$

qui donne, avec l'équation de l'hodographe,

$$(\alpha_1 - \beta_1) | \delta = 0,$$

c'est-à-dire que les déplacements de points de Σ sont normaux à la ligne double de Σ_1 et Σ_2.

L'équation d'une ligne droite de Σ_1 parallèle au vecteur $(\alpha_1 - \beta_1)$ peut être écrite

$$\rho = \rho_1 + m_1\alpha_1 + n_1\beta_1 + p_1 | (\alpha_1\beta_1) + u(\alpha_1 - \beta_1),$$

d'où nous obtenons, pour les déplacements des points de cette ligne,

$$\delta = (m_1 + n_1)\delta_2 + p_1 | [(\alpha_1 - \beta_1)\delta_2],$$

de sorte que les déplacements des points d'une telle droite sont égaux entre eux.

« Lorsque le système Σ possède un point sans déplacement et que les déplacements de deux autres points du système sont égaux, il présente une droite sans déplacement, qui passe par le premier point et est parallèle au vecteur déterminé par les deux autres points. Les déplacements des points d'une droite du système parallèle à la ligne sans déplacement sont égaux entre eux. Les déplacements de tous les points de Σ sont normaux à la droite fixe du système et sont, en grandeur, directement proportionnels aux distances des points à la droite fixe. »

Si nous remplaçons la ligne double du cas déjà traité par la ligne double actuelle des systèmes Σ_1 et Σ_2, nous reconnaissons que le système Σ peut être transporté de la manière la plus simple de la position Σ_1 à la position Σ_2 par une rotation autour de cette ligne, mouvement pour lequel sont valables, avec

$$\varepsilon = (\alpha_1 - \beta_1) : \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2},$$

les formules correspondantes du § 5, l'amplitude de la rotation doit être déterminée par l'équation

$$2 \sin \frac{1}{2} w = (\sqrt{\delta_2^2} : h_1').$$

§ 6'. — Si les déplacements des points de Σ sont infiniment petits, et si $d\rho_1 = 0$, $d\rho_2 = d\rho_3$, l'équation de l'hodographe du système des déplacements est

$$d\rho = (m + n) d\rho_2 + p \,|\, [(\alpha - \beta) d\rho_2].$$

et, par suite, l'équation de l'hodographe du système des vitesses de Σ est

$$\overline{v} = (m + n) \,|\, \overline{v}_2 + p \,|\, [(\alpha - \beta) \overline{v}_2],$$

le lieu des points sans déplacement, c'est-à-dire sans vitesse, est donné par

$$\rho = \rho_1 + m(\alpha - \beta);$$

on a encore

$$(\alpha - \beta) \,|\, d\rho = 0, \qquad (\alpha - \beta) \,|\, \overline{v} = 0,$$
$$dw = (\sqrt{d\rho_2^2} : h_1') = (ds_2 : h_1'), \quad w = (v_2 : h_1').$$

§ 7. — Supposons que le déplacement du système invariable Σ soit tel, que l'on ait seulement $\delta_1 = 0$.

Alors les systèmes Σ_1 et Σ_2 possèdent un point double $A_1 = A_2$, qui est donné.

L'équation de l'hodographe des déplacements des points de Σ s'écrit maintenant

$$\delta = m\delta_2 + n\delta_3 + p \,|\, [\alpha_1\delta_3 - \beta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3]$$

ou

$$\delta = \left\{ m + p \frac{(\delta_3\varepsilon) \,|\, [\alpha_1\delta_3 - \beta_1\delta_2]}{\varepsilon\delta_2\delta_3} \right\} \delta_2 + \left\{ n + p \frac{(\varepsilon\delta_2) \,|\, [\alpha_1\delta_3 - \beta_1\delta_2]}{\varepsilon\delta_2\delta_3} \right\} \delta_3.$$

Pour le plus petit déplacement nous obtenons

$$\delta_0 = 0,$$

les points du sytème ayant ce déplacement sont situés sur la droite

$$\rho_s = \rho_1 + u\varepsilon, \quad \varepsilon = [\,|\,(\delta_2\delta_3)] : \sqrt{(\delta_2\delta_3)^2},$$

équation que l'on obtient en faisant $\delta_1 = 0$ dans l'équation de la ligne double, qui a été développée dans le § 3, cette ligne passe par le point double $A_1 = A_2$ de Σ_1 et Σ_2 ; c'est aussi l'équation de la ligne double qui est composée uniquement de points doubles.

On a maintenant

$$\delta\,|\,\varepsilon = \delta_1\,|\,\varepsilon = 0.$$

L'équation d'une droite quelconque de $\Sigma = \Sigma_1$ parallèle au vecteur ε qui détermine la position du plan de l'hodographe du système des déplacements peut être écrite

$$\rho = \rho_1 + m_1\alpha_1 + n_1\beta_1 + u\varepsilon,$$

il en résulte, pour les déplacements de ses points,

$$\delta = m_1\delta_2 + n_1\delta_3 ;$$

ils son égaux entre eux.

« Lorsqu'un point du système invariable Σ reste en repos dans le passage de ce système de la position Σ_1 à la position Σ_2, celui-ci posséde toujours une droite en repos, elle passe par le point fixe donné, est perpendiculaire au plan de l'hodographe du système des déplacements des points de Σ, plan qui passe par le pôle de l'hodographe, avec chaque point de cette ligne coïncide une paire de points homologues de Σ_1 et Σ_2, elle coïncide avec la ligne double de Σ_1 et Σ_2 composée uniquement de points doubles. Les déplacements des points de Σ sont normaux à cette ligne, aucun point de Σ ne se déplace dans sa direction, les déplacements des points sont, quand à leurs grandeurs, directement proportionnels aux distances de points à cette ligne. Les points homologues de Σ_1 et Σ_2 sont à égale distance de la ligne double. »

Le système Σ peut donc être transporté de la position Σ_1 à la position Σ_2 par une rotation autour de la ligne double de Σ_1 et Σ_2.

Les distances en grandeur de deux points quelconques homologues de Σ_1 et Σ_2 à un point quelconque de la ligne double sont égales entr'elles puisque l'on a $\Sigma_1 \backsim \Sigma_2$. Les projections de

Σ_1 et Σ_2 sur un plan perpendiculaire à leur ligne double forment deux systèmes plans congruents ayant un point double à l'intersection du plan et de la ligne double. Chaque plan perpendiculaire à la ligne double de Σ_1 et Σ_2 coupe ces systèmes en des systèmes plans Σ'_1 et Σ'_2 congruents, dont le point double coïncide avec le point d'intersection de ce plan et de la ligne double ; les systèmes Σ'_1 et aussi les systèmes Σ'_2 dans des plans perpendiculaires à la ligne double sont congruents entr'eux. Le déplacement d'un point du système $\Sigma = \Sigma_1$ est égal au déplacement de sa projection sur un plan perpendiculaire à la ligne double. Lorsque Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, Σ' va de la position Σ'_1 à la position Σ'_2, ce qui a lieu de la manière la plus simple par rotation autour du point double de Σ'_1 et Σ'_2 situé sur la ligne double. Si ce passage s'exécute en une section plane, il s'exécute aussi dans toutes sections planes et, par suite, le système Σ passe de la manière la plus simple de la position Σ_1 à la position Σ_2 par sa rotation autour de la ligne double de Σ_1 et Σ_2.

La grandeur de l'angle de la rotation résulte directement, en maintenant les relations déjà posées et en considérant les déplacements des points B et C, de la formule

$$2 \sin \frac{1}{2} w = \frac{\sqrt{\delta_2^2}}{h'_1} = \frac{\sqrt{\delta_3^2}}{h''_1}.$$

« Le mouvement d'un système invariable Σ qui possède un point fixe en passant, d'une manière quelconque d'une position Σ_1 à une autre position Σ_2, est équivalent à une rotation autour de l'axe passant par ce point et perpendiculaire au plan de l'hodographe de son système des déplacements, et c'est la manière la plus simple de réaliser son déplacement. »

§ 7'. — Si les déplacements des points du système Σ sont infiniments petits et que l'on ait $d\rho_1 = 0$, le point A étant ainsi en repos, l'équation de l'hodographe du système des déplacements est

$$d\rho = m d\rho_2 + n d\rho_3 + p \,|\, [\alpha d\rho_3 - \beta d\rho_2],$$

ou encore

$$d\rho = \left\{ m - p \frac{(\varepsilon \,|\, \alpha) d\rho_3^2 - (\varepsilon \,|\, \beta)(d\rho_2 \,|\, d\rho_3)}{\varepsilon d\rho_2 d\rho_3} \right\} d\rho_2 + \left\{ n + p \frac{(\varepsilon \,|\, \alpha)(d\rho_2 \,|\, d\rho_3) - (\varepsilon \,|\, \beta) d\rho_2^2}{\varepsilon d\rho_2 d\rho_3} \right\} d\rho_3.$$

Les équations de l'hodographe de son système des vitesses sont donc

$$\bar{v} = m\bar{v}_2 + n\bar{v}_3 + p \,|\, [\alpha\bar{v}_3 - \beta\bar{v}_2],$$

$$\bar{v} = \left\{ m - p\,\frac{(\varepsilon\,|\,\alpha)\,\bar{v}_3^{\,2} - (\varepsilon\,|\,\beta)\,(\bar{v}_2\,|\,\bar{v}_3)}{\varepsilon\bar{v}_2\,\bar{v}_3} \right\} \bar{v}_2$$
$$+ \left\{ n + p\,\frac{(\varepsilon\,|\,\alpha)\,(\bar{v}_2\,|\,\bar{v}_3) - (\varepsilon\,|\,\beta)\,\bar{v}_2^{\,2}}{\varepsilon\,\bar{v}_2\bar{v}_3} \right\} \bar{v}_3.$$

On a maintenant $d\rho_0 = 0$, $\bar{v}_0 = 0$, et

$$\rho_0 = \rho_1 + u\varepsilon, \qquad \varepsilon = \frac{|\,(d\rho_2 d\rho_3)}{\sqrt{(d\rho_2\, d\rho_3)^2}} = \frac{|\,(\bar{v}_2\,\bar{v}_3)}{\sqrt{(\bar{v}_2\bar{v}_3)^2}},$$

est l'équation de la ligne double de Σ_1 et Σ_2.

Pour le passage de Σ de la position Σ_1 à la position Σ_2 par une rotation autour de la ligne double comme axe, le déplacement angulaire et la vitesse angulaire sont

$$dw = \frac{\sqrt{d\rho_2^{\,2}}}{h_1'} = \frac{\sqrt{d\rho_3^{\,2}}}{h_1''}, \quad w = \frac{v_2}{h_1'} = \frac{v_3}{h_1''},$$

Si U est un point quelconque du système Σ, $\overline{A_1U_1} = \rho$, on a, comme le point A est en repos, $\alpha|d\alpha = 0$, $\beta|d\beta = 0$, ainsi $\rho|d\rho = 0$, et, comme $d\rho$ est en outre perpendiculaire à ε, nous pouvons poser

$$d\rho = x\,|\,(\varepsilon\rho),$$

de plus le déplacement d'un autre point X du système Σ est, d'après cela, en posant $\overline{A_1X_1} = \psi$,

$$d\psi = x_1\,|\,(\varepsilon\psi).$$

Mais on a aussi

$$\rho\,|\,d\psi + \psi\,|\,d\rho = 0,$$

de manière que l'on a aussi, en combinant les trois dernières équations

$$\rho\,|\,[x_1\,|\,(\varepsilon\psi)] + \psi\,|\,[x\,|\,(\varepsilon\rho)] = 0,$$

ou

$$x_1(\rho\varepsilon\psi) + x(\psi\varepsilon\rho) = 0,$$

d'où il résulte

$$x_1 = x = \frac{d\rho}{|\,(\varepsilon\rho)} = \frac{d\psi}{|\,(\varepsilon\psi)}.$$

En posant

$$\rho = y\varepsilon + \chi, \quad \psi = y_1\varepsilon + \chi_1, \ (\varepsilon|\chi) = (\varepsilon|\chi_1) = 0,$$

il suit

$$d\rho = x|(\varepsilon\chi), \quad d\psi = x|(\varepsilon\chi_1),$$

les déplacements des points U de Σ sont, quant à leurs grandeurs, directement proportionnels à leurs distances à l'axe $\bar{\varepsilon}$ passant par le point $A_1 = A_2$.

D'après tout ce qui précède, les déplacements des points de Σ forment un système de déplacements qui peut être obtenu par une rotation autour de cet axe, de sorte que, parce que x est infiniment petit, l'amplitude de cette rotation est

$$dw = x = \frac{d\rho}{|(\varepsilon\chi)} = \frac{d\psi}{|(\varepsilon\chi_1)}.$$

Nous obtenons ainsi les équations valables pour tous les points du système Σ

$$d\rho = dw\,|(\varepsilon\rho) = dw\,|(\varepsilon\chi),$$
$$\bar{v} = w\,|(\varepsilon\rho) = w\,|(\varepsilon\chi).$$

Les déplacements infiniment petits $d\rho_2$ et $d\rho_3$ des points B et C sont donnés, on a donc

$$dw = \frac{d\rho_2}{|(\varepsilon\alpha)} = \frac{d\rho_3}{|(\varepsilon\beta)}, \quad w = \frac{\bar{v}_2}{|(\varepsilon\alpha)} = \frac{\bar{v}_3}{|(\varepsilon\beta)}.$$

Nous obtenons maintenant, pour le radius vector $\psi = \overline{A_1U_2}$ du point U après la rotation

$$\psi = \rho + dw\,|(\varepsilon\rho).$$

§ 8.— Appliquons-nous maintenant au cas général, savoir celui où, dans le passage du système Σ d'une position donnée Σ_1 à une autre position donnée Σ_2, aucun point du système ne demeure en repos.

L'équation de l'hodographe du système des déplacements des points de Σ s'écrit

$$\delta = \delta_1 + \left\{ m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p\,|\,[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta] \right\}.$$

Le déplacement de tout point de Σ se compose d'après cela de deux parties ou composantes, d'une translation commune à tous les points du système

$$\delta_1 = \delta_1,$$

égale au déplacement $\overline{A_1A_2}$ du point A et du déplacement

$$\delta_r = m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p \,|\, [\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta],$$

qui est parallèle au plan de l'hodographe, de sorte que le système des déplacements δ_r est réalisable au moyen d'une rotation.

Les déplacements des éléments d'une droite du système Σ parallèle à ε sont égaux entr'eux, il existe dans Σ une droite dont les points sont déplacés dans sa propre direction d'un vecteur

$$\delta_0 = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\sqrt{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2}}\,\varepsilon,$$

elle se conjoint avec la ligne double sans points doubles de Σ_1 et Σ_2, leur équation est de la forme

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{\varepsilon\delta_3\delta_1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\,\alpha_1 + \frac{\varepsilon\delta_1\delta_2}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\,\beta_1 + u \,|\, (\delta_\alpha\delta_\beta).$$

Les projections des déplacements des points du système Σ sur les droites du faisceau parallèle à ε sont égales au déplacement minimum δ_0, de sorte que, dans le passage du système Σ de la position Σ_1 à la position Σ_2 chaque point du système Σ est déplacé dans la direction de ε du vecteur δ_0.

Comme l'on a

$$\delta = \delta_1 + \delta_r = \delta_r + \delta_1,$$

le système Σ peut être conduit de la position Σ_1 à la position Σ_2 par une translation et une rotation, ou par une rotation et une translation. Tous les points du système Σ ont une translation commune, qui est égale au déplacement total δ_1 du point A, la rotation doit avoir lieu autour de l'axe $\overline{\varepsilon}$ passant par le point $A = A_1$, l'équation de cet axe est

$$\rho = \rho_1 + u\varepsilon.$$

Si nous considérons les déplacements de B et C dans ce mouvement, nous obtenons pour l'amplitude de la rotation

$$2 \sin \frac{1}{2} w = \sqrt{\frac{(\delta_2 - \delta_1)^2}{(\varepsilon\alpha_1)^2}} = \sqrt{\frac{(\delta_3 - \delta_1)^2}{(\varepsilon\beta_1)^2}}.$$

Si un système invariable Σ possède une rotation autour d'un axe et une translation inclinée sur cet axe, son mouvement est équivalent à une rotation de la même amplitude autour d'un autre axe parallèle au premier et à une translation parallèle à cet axe, translation qui est égale au déplacement total d'un point quelconque du système dans la direction de cet axe.

Maintenant si δ_0 est la translation du cas précédent et si nous choisissons l'axe en question comme axe de rotation, comme les points du système situés sur cet axe se déplacent seulement du vecteur δ_0 dans le passage de Σ_1 à Σ_2, le nouvel axe coïncide avec la ligne double de Σ_1 et Σ_2, son équation est donc

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{\delta_3\delta_1\varepsilon}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta} \alpha_1 + \frac{\delta_1\delta_2\varepsilon}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta} \beta_1 + u\varepsilon.$$

« Lorsqu'un système invariable Σ passe d'une manière quelconque d'une position donnée Σ_1 à une autre position donnée Σ_2, son mouvement est toujours équivalent à un mouvement hélicoïdal et c'est le mouvement le plus simple possible réalisant le déplacement donné. »

Si nous partons de la réduction du système des déplacements des points du système Σ au point $A = A_1$, respectivement pour la direction $\bar{\varepsilon}$ passant par le point $A = A_1$, les déplacements des points d'une droite du système Σ parallèles à ε étant égaux entr'eux, si λ désigne la distance de l'axe du mouvement hélicoïdal au point $A = A_1$, l'on a

$$2\lambda = (\varepsilon\delta_1) | \varepsilon + \text{cotang} \frac{1}{2} w | (\varepsilon\delta_1)$$

et, par conséquent, l'équation de cet axe

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{2} \left\{ (\varepsilon\delta_1) | \varepsilon + \text{cotang} \frac{1}{2} w | (\varepsilon\delta_1) \right\} + u\varepsilon.$$

L'équation du radius vector du plan contenant les points A_1, B_1 et C_1 est

$$\chi = \rho_1 + x\alpha_1 + y\beta_1.$$

Pour le point d'intersection de l'axe du mouvement hélicoïdal et de ce plan, on doit donc avoir

$$x\alpha_1 + y\beta_1 = \frac{1}{2}\left\{ (\varepsilon\delta_1)\,|\,\varepsilon + \text{cotang}\,\frac{1}{2}\,w\,|\,(\varepsilon\delta_1) \right\},$$

ou, en multipliant cette équation par ε,

$$x(\alpha_1\varepsilon) + y(\beta_1\varepsilon) = \frac{1}{2}\left\{ [\delta_1 - (\varepsilon\,|\,\delta_1)\varepsilon]\varepsilon + \text{cotg}\,\frac{1}{2}\,w\,|\,[(\varepsilon\delta_1)\,|\,\varepsilon] \right\},$$

$$x(\alpha_1\varepsilon) + y(\beta_1\varepsilon) = \frac{1}{2}\left\{ (\delta_1\varepsilon) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}\,w\,|\,[\delta_1 - (\varepsilon\,|\,\delta_1)\varepsilon] \right\}.$$

Il en résulte, en multipliant successivement cette relation par β_1 et α_1,

$$x(\alpha_1\varepsilon\beta_1) = \frac{1}{2}\left\{ (\delta_1\varepsilon\beta_1) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}\,w\,[(\beta_1\,|\,\delta_1) - (\varepsilon\,|\,\delta_1)(\varepsilon\,|\,\beta_1)] \right\},$$

$$y(\beta_1\varepsilon\alpha_1) = \frac{1}{2}\left\{ (\delta_1\varepsilon\alpha_1) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}\,w[(\alpha_1\,|\,\delta_1) - (\varepsilon\,|\,\delta_1)(\varepsilon\,|\,\alpha_1)] \right\},$$

formules qui donnent les valeurs des coefficients x et y pour le point d'intersection de l'axe du mouvement hélicoïdal et du plan contenant les points A_1, B_1 et C_1.

Par ce moyen on a aussi une équation de cet axe

$$\begin{aligned}\rho_s = \rho_1 &+ \frac{1}{2(\alpha_1\beta_1\varepsilon)}\left\{ (\delta_1\beta_1\varepsilon) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}\,w[(\varepsilon\,|\,\delta_1)(\varepsilon\,|\,\beta_1) - (\beta_1\,|\,\delta_1)] \right\}\alpha_1 \\ &+ \frac{1}{2(\alpha_1\beta_1\varepsilon)}\left\{ (\delta_1\alpha_1\varepsilon) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}\,w[(\varepsilon\,|\,\delta_1)(\varepsilon\,|\,\alpha_1) - (\alpha_1\,|\,\delta_1)] \right\}\beta_1 + u\varepsilon.\end{aligned}$$

De deux équations relatives à la ligne double de Σ_1 et Σ_2 résultant les relations numériques

$$\frac{\delta_3\delta_1\varepsilon}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon} = \frac{1}{2(\alpha_1\beta_1\varepsilon)}\left\{ (\delta_1\beta_1\varepsilon) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}\,w[(\varepsilon\,|\,\delta_1)(\varepsilon\,|\,\beta_1) - (\beta_1\,|\,\delta_1)] \right\},$$

$$\frac{\delta_1\delta_2\varepsilon}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon} = \frac{1}{2(\alpha_1\beta_1\varepsilon)}\left\{ (\delta_1\alpha_1\varepsilon) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}\,w[(\varepsilon\,|\,\delta_1)(\varepsilon\,|\,\alpha_1) - (\alpha_1\,|\,\delta_1)] \right\}.$$

On détermine encore la distance de l'axe du mouvement hélicoïdal au point A, au moyen de sa première équation.

On doit avoir

$$\lambda = \frac{\delta_3\delta_1\varepsilon}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon}\,\alpha_1 + \frac{\delta_1\delta_2\varepsilon}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon}\,\beta_1 + x\varepsilon, \quad (\varepsilon\,|\,\lambda) = 0,$$

de sorte que l'on a aussi

$$o = (\delta_3\delta_1\varepsilon)(\alpha_1|\varepsilon) + (\delta_1\delta_2\varepsilon)(\beta_1|\varepsilon) + x\sqrt{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2}$$

d'où nous obtenons

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2}} \left\{ (\delta_3\delta_1\varepsilon)\alpha_1 + (\delta_1\delta_2\varepsilon)\beta_1 - [(\delta_3\delta_1\varepsilon)(\alpha_1|\varepsilon) + (\delta_1\delta_2\varepsilon)(\beta_1|\varepsilon)]\varepsilon \right\},$$

et l'équation de l'axe est de nouveau

$$\rho_s = \rho_1 + \lambda + u\varepsilon.$$

L'équation de l'hodographe du système des déplacements des points de Σ s'écrit

$$\delta = \delta_1 + m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p\,|\left\{ \alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta \right\}.$$

Le déplacement total d'un point quelconque X de Σ se déduit de là comme composé de deux parties, dont l'une est égale au déplacement total d'un autre point quelconque U du système et dont l'autre est parallèle au plan de l'hodographe.

Si nous posons

$$\delta = \delta_1 + m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p\mu,$$

on a

$$\delta_x = \delta_1 + m_x\delta_\alpha + n_x\delta_\beta + p_x\mu.$$

De cette équation résulte, par l'élimination de δ_1,

$$\delta_x = \delta + (m_x - m)\delta_\alpha + (n_x - n)\delta_\beta + (p_x - p)\mu$$

ou

$$\delta_x = \delta + \delta_{r,x} = \delta_{r,x} + \delta.$$

On en déduit, en posant $x = 1, 2, 3\ldots$,

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta + \delta_{r,1} = \delta - \left\{ m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p\mu \right\},\\
\delta_2 &= \delta + \delta_{r,2} = \delta - \left\{ (m-1)\delta_\alpha + n\delta_\beta + p\mu \right\},\\
\delta_3 &= \delta + \delta_{r,3} = \delta - \left\{ m\delta_\alpha + (n-1)\delta_\beta + p\mu \right\},\\
\delta_4 &= \delta + \delta_{r,4} = \delta - \left\{ (m-m_4)\delta_\alpha + (n-n_4)\delta_\beta + (p-p_4)\mu \right\},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Les composantes $\delta_{r,1}, \delta_{r,2}, \delta_{r,3}, \ldots$ des déplacements $\delta_1, \delta_2, \delta_3\ldots$, c'est-à-dire $\delta_{r,x}$, $x = 1, 2, 3\ldots$ forment, puisqu'elles sont parallèles au plan de l'hodographe, dans leur ensemble, un déplacement résultant d'une rotation, elles sont égales à la différence entre le déplacement total δ_x du point du système Σ et le déplacement total d'un point du système arbitrairement choisi U, commun par conséquent à tous les points du système et perpendiculaire au vecteur déterminant la position du plan de l'hodographe.

De là et en se reportant au cours de notre développement, on déduit directement la proposition :

« Lorsqu'un système invariable Σ passe d'une position donnée Σ_1 d'une manière quelconque à une autre position donnée Σ_2, son mouvement est équivalent à une translation du système, qui est égale au déplacement total d'un point quelconque du système Σ et à une rotation de Σ autour de l'axe passant par ce point du système et parallèle au vecteur qui détermine la position du plan de l'hodographe du système des déplacements des points de Σ. Comme par la translation Σ reste parallèle à lui-même, quelque soit le point dont le déplacement ait été choisi comme déplacement total, et que l'hodographe reste la même pour chaque point de réduction, l'amplitude de la rotation et la direction de l'axe de rotation restent les mêmes pour toute réduction du système de déplacement. L'ordre suivant, par lequel sont opérées la translation et la rotation est indifférent, et elles peuvent être simultanées ».

Si nous choisissons le moindre déplacement δ_0 comme vecteur de translation du système on a

$$\delta_x = \delta_0 + \delta_{r,x} = \delta_{r,x} + \delta_0.$$

l'axe de rotation coïncide alors avec la ligne double des systèmes Σ_1 et Σ_2, tous les points de Σ possèdent alors en commun, quand Σ passe de Σ_1 à Σ_2, la moindre translation, et si la rotation et la translation s'effectuent uniformément, les points du système Σ décrivent des arcs d'hélices de même pas autour de la ligne double comme axe.

« Le mouvement d'un système invariable Σ passant d'une manière quelconque d'une position Σ_1 à une autre position Σ_2 est équivalent à un mouvement hélicoïdal, qui est son mouvement le plus simple. »

Si nous prenons un point quelconque O de l'axe des hélices comme pôle des coordonnées, l'on a pour le déplacement d'un point quelconque U du système Σ, en posant $U_1 = O + \rho$, $U_2 = O + \psi$,

$$\psi = (\varepsilon \mid \rho)\varepsilon + \cos \omega[(\varepsilon\rho) \mid \varepsilon] + \sin \omega \mid (\varepsilon\rho) + \delta_0,$$

et le déplacement total de ce point du système est

$$\delta = \psi - \rho = (1 - \cos \omega)[(\rho\varepsilon) \mid \varepsilon] + \sin \omega \mid (\varepsilon\rho) + \delta_0.$$

Les formules correspondantes, quand on prend un autre axe quelconque pour faire passer le système Σ de la position Σ_1 à la position Σ_2 sont les mêmes moyennant le remplacement de δ_0 par le déplacement de cette droite considéré comme droite du système Σ.

§ 8'. — Si les déplacements des points du système Σ sont infiniment petits, l'équation de l'hodographe des déplacements des points du système est

$$d\rho = d\rho_1 + m d\alpha + n d\beta + p \mid [\alpha d\beta - \beta d\alpha],$$

le système des déplacements infiniment petits se décompose en les deux systèmes partiels

$$\begin{aligned} d\rho_1 &= d\rho_1 \\ d\rho_r &= m d\alpha + n d\beta + p \mid [\alpha d\beta - \beta d\alpha], \end{aligned}$$

de sorte que l'on a

$$d\rho = d\rho_1 + d\rho_r = d\rho_r + d\rho_1.$$

L'hodographe des vitesses des points du système Σ a évidemment l'équation

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + m(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) + n(\bar{v}_3 - \bar{v}_1) + p \mid [\alpha(\bar{v}_3 - \bar{v}_1) - \beta(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)],$$

le système des vitesses se décompose dans les deux systèmes partiels

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \bar{v}_1 \\ \bar{v}_r &= m\alpha' + n\beta' + p \mid [\alpha\beta' - \beta\alpha']. \end{aligned}$$

Le déplacement du système Σ est équivalent à une translation infiniment petite $d\rho_1$ de ses points et à une rotation infiniment petite autour de l'axe passant par le point $A = A_1$ et ayant pour équation

$$\rho = \rho_1 + u\varepsilon, \quad \varepsilon = [|(d\alpha d\beta)] : \sqrt{(d\alpha d\beta)^2} = [|(\alpha'\beta')] : \sqrt{(\alpha'\beta')^2},$$

l'angle de la rotation est

$$dw = \frac{\sqrt{(d\rho_2 - d\rho_1)^2}}{\sqrt{(\varepsilon\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{(d\rho_3 - d\rho_1)^2}}{\sqrt{(\varepsilon\beta)^2}},$$

et la vitesse angulaire

$$w = \frac{\sqrt{(\overline{v}_2 - \overline{v}_1)^2}}{\sqrt{(\varepsilon\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{(\overline{v}_3 - \overline{v}_1)^2}}{\sqrt{(\varepsilon\beta)^2}}.$$

Si nous choisissons comme axe de rotation la droite qui coïncide avec la ligne double de Σ_1 et Σ_2, l'équation de cette dernière est

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\left\{(\varepsilon d\rho_3 d\rho_1)\alpha + (\varepsilon d\rho_1 d\rho_2)\beta\right\} + u\varepsilon,$$

ou encore

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{\sqrt{(\alpha'\beta')^2}}\left\{(\varepsilon\overline{v}_3\overline{v}_1)\alpha + (\varepsilon\overline{v}_1\overline{v}_2)\beta\right\} + u\varepsilon,$$

le système Σ se déplace alors parallèlement à lui-même suivant le vecteur

$$d\rho_0 = \frac{d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3}{\sqrt{(d\alpha d\beta)^2}}\,\varepsilon$$

avec la vitesse

$$\overline{v}_0 = \frac{\overline{v}_1\overline{v}_2\overline{v}_3}{\sqrt{(\alpha'\beta')^2}}\,\varepsilon,$$

et le même déplacement angulaire et la même vitesse angulaire que précédemment, son mouvement consiste donc dans un mouvement hélicoïdal infiniment petit.

En prenant le pôle des coordonnées sur l'axe des hélices, on a pour le point U du système Σ

$$\psi = \rho + dw|(\varepsilon\rho) + d\rho_0,$$
$$d\rho = dw|(\varepsilon\rho) + d\rho_0, \quad \overline{v} = w|(\varepsilon\rho) + \overline{v}_0.$$

§ 9. — Les cas généraux développés dans les paragraphes 8 et 8′ comprennent tous les cas particuliers. Nous allons pourtant examiner différentes acceptions relatives à des déplacements δ_1, δ_2 et δ_3 ou $d\rho_1$, $d\rho_2$ et $d\rho_3$ déjà traitées comme cas particuliers.

§ 10. — Il nous reste d'abord à exprimer les résultats généraux habituels en coordonnées rectangulaires, il s'agit notamment de l'équation de l'hodographe du système des déplacements, de l'axe hélicoïdal, de l'amplitude et de la translation du mouvement de torsion.

Soit

$$\begin{aligned}
A_1 &= O + \rho_1 = O + x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2 + z_1\varepsilon_3, & \delta_1 &= d_1'\varepsilon_1 + d_1''\varepsilon_2 + d_1'''\varepsilon_3,\\
B_1 &= O + \rho_2 = O + x_2\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + z_2\varepsilon_3, & \delta_2 &= d_2'\varepsilon_1 + d_2''\varepsilon_2 + d_2'''\varepsilon_3,\\
C_1 &= O + \rho_3 = O + x_3\varepsilon_1 + y_3\varepsilon_2 + z_3\varepsilon_3, & \delta_3 &= d_3'\varepsilon_1 + d_3''\varepsilon_2 + d_3'''\varepsilon_3,
\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (x_2 - x_1)\varepsilon_1 + (y_2 - y_1)\varepsilon_2 + (z_2 - z_1)\varepsilon_3 = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3,\\
\beta_1 &= (x_3 - x_1)\varepsilon_1 + (y_3 - y_1)\varepsilon_2 + (z_3 - z_1)\varepsilon_3 = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3,\\
\delta_\alpha &= (d_2' - d_1')\varepsilon_1 + (d_2'' - d_1'')\varepsilon_2 + (d_2''' - d_1''')\varepsilon_3 = a_1'\varepsilon_1 + a_2'\varepsilon_2 + a_3'\varepsilon_3,\\
\delta_\beta &= (d_3' - d_1')\varepsilon_1 + (d_3'' - d_1'')\varepsilon_2 + (d_3''' - d_1''')\varepsilon_3 = b'_1\varepsilon_1 + b_2'\varepsilon_2 + b_3'\varepsilon_3.
\end{aligned}$$

Le radius vector d'un point quelconque U de $\Sigma = \Sigma_1$, ou l'équation du système ponctuel $\Sigma = \Sigma_1$, est maintenant

$$\begin{aligned}
\rho &= x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3\\
&= x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2 + z_1\varepsilon_3 + m(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3) + n(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3)\\
&\quad + p\left|\left\{(a_1b_2 - a_2b_1)(\varepsilon_1\varepsilon_2) + (a_2b_3 - a_3b_2)(\varepsilon_2\varepsilon_3) + (a_3b_1 - a_1b_3)(\varepsilon_3\varepsilon_1)\right\}\right..
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\rho &= x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3\\
&= [x_1 + ma_1 + nb_1 + p(a_2b_3 - a_3b_2)]\varepsilon_1 + [y_1 + ma_2 + nb_2 + p(a_3b_1 - a_1b_3)]\varepsilon_2\\
&\quad + [z_1 + ma_3 + nb_3 + p(a_1b_2 - a_2b_1)]\varepsilon_3.
\end{aligned}$$

Les coordonnées de ce point sont donc

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + ma_1 + nb_1 + p(a_2b_3 - a_3b_2) = x_1 + ma_1 + nb_1 + pc_1,\\
y &= y_1 + ma_2 + nb_2 + p(a_3b_1 - a_1b_3) = y_1 + ma_2 + nb_2 + pc_2,\\
z &= z_1 + ma_3 + nb_3 + p(a_1b_2 - a_2b_1) = z_1 + ma_3 + nb_3 + pc_3.
\end{aligned}$$

On déduit de là les valeurs des coefficients m, n, p, exprimé en fonction de x, y, z et des quantités données.

Nous écrivons, pour résoudre ces équations par rapport à m, n et p,

$$\begin{aligned}
ma_1e_1+nb_1e_1+pc_1e_1 &= (x-x_1)e_1,\\
ma_2e_2+nb_2e_2+pc_2e_2 &= (y-y_1)e_2, \qquad (e_1e_2e_3)=1,\\
ma_3e_3+nb_3e_3+pc_3e_3 &= (z-z_1)e_3,
\end{aligned}$$

l'addition de ces équations donne

$$\begin{aligned}
&m(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)+n(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3)+p(c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3)\\
&=(x-x_1)e_1+(y-y_1)e_2+(z-z_1)e_3,
\end{aligned}$$

et nous en déduisons, par la multiplication extérieure, pour m, n et p les relations

$$m\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix},$$

$$n\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1\\ c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix},$$

$$p\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1\\ \alpha_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

Ces équations donnent directement les valeurs de m, n et p. Pour le développement ultérieur il faudra toujours prendre les valeurs précédentes pour m, n et p.

Nous obtenons maintenant pour le déplacement du point $U \equiv U_1$ du système Σ de coordonnées x, y et z :

$$\begin{aligned}
\delta &= d'\varepsilon_1+d''\varepsilon_2+d'''\varepsilon_3\\
&= d_1'\varepsilon_1+d''_1\varepsilon_2+d_1'''\varepsilon_3+m\left\{a_1'\varepsilon_1+a_2'\varepsilon_2+a_3'\varepsilon_3\right\}+n(b_1'\varepsilon_1+b_2'\varepsilon_2+b_3'\varepsilon_3)\\
&+p\left\{(a_2b_3'-a_3b_2')\varepsilon_1+(a_3b_1'-a_1b_3')\varepsilon_2+(a_1b_2'-a_2b_1')\varepsilon_3\right.\\
&\qquad-(b_2a_3'-a_3b_2')\varepsilon_1-(b_3a_1'-b_1a_3')\varepsilon_2-(b_1a_2'-b_2a_1')\varepsilon_3\\
&\qquad\left.+(a_2'b_3'-a_3'b_2')\varepsilon_1+(a_3'b_1'-a_1'b_3')\varepsilon_2+(a_1'b_2'-a_2'b_1')\varepsilon_3\right\},
\end{aligned}$$

ou, en ordonnant par rapport à ε_1, ε_3, ε_3,

$$\begin{aligned}
\delta &= d'\varepsilon_1+d''\varepsilon_2+d'''\varepsilon_3\\
&=\left\{d_1'+ma_1'+nb_1'+p[a_2b_3'-a_3b_2'-b_2a_3'+b_3a_2'+a_2'b_3'-a_3'b_2']\right\}\varepsilon_1\\
&+\left\{d_1''+ma_2'+nb_2'+p[a_3b_1'-a_1b_3'-b_3a_1'+b_1a_3'+a_3'b_1'-a_1'b_3']\right\}\varepsilon_2\\
&+\left\{d_1'''+ma_3'+nb_3'+p[a_1b_2'-a_2b_1'-b_1a_2'+b_2a_1'+a_1'b_2'-a_2'b_1']\right\}\varepsilon_3.
\end{aligned}$$

Cette équation donne directement les composantes du déplacement total d'un point quelconque du système Σ parallèles aux axes des coordonnées.

Avec δ comme rayon vecteur, d', d'' et d''' sont les coordonnées courantes du plan de l'hodographe du système des déplacements des points de Σ.

La seconde des équations de l'hodographe nous donne

$$\{(d' - d'_1)\,\varepsilon_1 + (d'' - d_1'')\,\varepsilon_2 + (d''' - d_1''')\,\varepsilon_3\}$$
$$\times \{(a_1'\varepsilon_1 + a_2'\varepsilon_2 + a_3'\varepsilon_3)\,(b_1'\varepsilon_1 + b_2'\varepsilon_2 + b_3'\varepsilon_3)\} = 0,$$

l'équation de l'hodographe est donc, avec les coordonnées d', d'' et d''',

$$\begin{vmatrix} d' - d_1', & d'' - d_1'', & d''' - d_1''' \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Pour le déplacement minimum, nous obtenons au moyen de la première formule, qui donne δ_0,

$$\delta_0 = d_0'\varepsilon_1 + d_0''\varepsilon_2 + d_0'''\varepsilon_3$$
$$= \begin{vmatrix} d_1' & d_1'' & d_1''' \\ d_2' & d_2'' & d_2''' \\ d_3' & d_3'' & d_3''' \end{vmatrix} :$$
$$\frac{(a_2'b_3' - a_3'b_2')\varepsilon_1 + (a_3'b_1' - a_1'b_3')\varepsilon_2 + (a_1'b_2' - a_2'b_1')}{(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2)(b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2) - (a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3')^2},$$

équation dont nous pouvons tirer directement les composantes de δ_0 parallèles aux axes de coordonnées, la grandeur de ce déplacement est

$$\sqrt{\delta_0^2} = \begin{vmatrix} d_1' & d_1'' & d_1''' \\ d_2' & d_2'' & d_2''' \\ d_3' & d_3'' & d_3''' \end{vmatrix} :$$
$$\{(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2)(b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2) - (a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3')^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation du radius vector de l'axe de rotation, quand on prend le point $A = A_1$ comme point de réduction du système des déplacements, est

$$\rho = \rho_1 + u \mid (\delta_\alpha \delta_\beta),$$

ou

$$(\rho - \rho_1) \mid (\delta_\alpha \delta_\beta) = 0,$$

d'où l'on a encore

$$\begin{aligned}&\{(x-x_1)\varepsilon_1+(y-y_1)\varepsilon_2+(z-z_1)\varepsilon_3\}\\ \times&\{(a_2'b_3'-a_3'b_2')\varepsilon_1+(a_3'b_1'-a_1'b_3')\varepsilon_2+(a_1'b_2'-a_2'b_1')\varepsilon_3\}=0,\end{aligned}$$

d'où résultent directement, comme équations de cet axe en coordonnées habituelles

$$\frac{x-x_1}{a_2'b_3'-a_3'b_2'}=\frac{y-y_1}{a_3'b_1'-a_1'b_3'}=\frac{z-z_1}{a_1'b_2'-a_2'b_1'}.$$

L'équation du radius vector de l'axe pour le mouvement hélicoïdal du système Σ s'écrit

$$\rho_s=\rho_1+\frac{(\delta_3\delta_1)\,|\,(\delta_\alpha\delta_\beta)}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2}\,\alpha_1+\frac{(\delta_1\delta_2)\,|\,(\delta_\alpha\delta_\beta)}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2}\,\beta_1+u\,|\,(\delta_\alpha\delta_\beta).$$

Nous posons pour abréger,

$$\begin{aligned}|\,(\delta_\alpha\delta_\beta)&=(a_2'b_3'-a_3'b_2')\varepsilon_1+(a_3'b'_1-a_1'b_3')\varepsilon_2+(a_1'b_2'-a_2'b_1')\varepsilon_3\\&=c_1'\varepsilon_1+c_2'\varepsilon_2+c_3'\varepsilon_3,\end{aligned}$$

moyennant quoi, le vecteur fixant la position du plan de l'hodographe est

$$\varepsilon=(c_1'\varepsilon_1+c_2'\varepsilon_2+c_3'\varepsilon_3):\sqrt{c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2},$$

ou

$$\varepsilon=(c_1'\varepsilon_1+c_2'\varepsilon_2+c_3'\varepsilon_3):c',\quad c'^2=c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2.$$

Nous en déduisons d'abord

$$(\delta_3\delta_1)\,|\,(\delta_\alpha\delta_\beta)=\begin{vmatrix}d_3' & d_3'' & d_3'''\\ d_1' & d_1'' & d_1'''\\ c_1' & c_2'' & c_3'''\end{vmatrix}=\Delta_1,$$

$$(\delta_1\delta_2)\,|\,(\delta_\alpha\delta_\beta)=\begin{vmatrix}d_1' & d_1'' & d_1'''\\ d_2' & d_2'' & d_2'''\\ c_1' & c_2' & c_3'\end{vmatrix}=\Delta_2.$$

Maintenant il résulte de l'équation du radius vector de l'axe hélicoïdal

$$\begin{aligned}(x-x_1)\varepsilon_1+(y-y_1)\varepsilon_2+(z-z_1)\varepsilon_3=&\frac{\Delta_1}{c'^2}(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3)\\&+\frac{\Delta_2}{c'^2}(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+b_3\varepsilon_3)+u(c_1'\varepsilon_1+c_2'\varepsilon_2+c_3'\varepsilon_3).\end{aligned}$$

d'où

$$u = \frac{x - x_1}{c_1'} - \frac{a_1\Delta_1}{c_1'c'^2} - \frac{b_1\Delta_2}{c_1'c'^2}$$
$$= \frac{y - y_1}{c_2'} - \frac{a_2\Delta_1}{c_2'c'^2} - \frac{b_2\Delta_2}{c_2'c'^2}$$
$$= \frac{z - z_1}{c_3'} - \frac{a_3\Delta_1}{c_3'c'^2} - \frac{b_3\Delta_2}{c_3'c'^2},$$

en multipliant cette relation par $(c_1'c_2'c_3'c'^2)$ il vient

$$\{ c'^2(x - x_1) - a_1\Delta_1 - b_1\Delta_2 \} c_2'c_3'$$
$$= \{ c'^2(y - y_1) - a_2\Delta_1 - b_2\Delta_2 \} c_3'c_1'$$
$$= \{ c'^2(z - z_1) - a_3\Delta_1 - b_3\Delta_2 \} c_1'c_2',$$

et, en exprimant encore a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 en fonction de quantités données, on obtient comme équations en coordonnées habituelles de l'axe du mouvement hélicoïdal de Σ

$$\{ c'^2(x - x_1) - \Delta_1(x_2 - x_1) - \Delta_2(x_3 - x_1) \} c_1'c_3'$$
$$= \{ c'^2(y - y_1) - \Delta_1(y_2 - y_1) - \Delta_2(y_3 - y_1) \} c_3'c_1'$$
$$= \{ c'^2(z - z_1) - \Delta_1(z_2 - z_1) - \Delta_2(z_3 - z_1) \} c_1'c_2'.$$

Il reste encore à déterminer l'angle de rotation w.

Pour cela nous possédons l'équation

$$4 \sin^2 \frac{1}{2} w = \frac{(\delta_2 - \delta_1)^2}{(\varepsilon\alpha_1)^2} = \frac{\delta_\alpha^2}{\alpha_1^2 - (\alpha_1 | \varepsilon)^2}$$

ce qui donne

$$4 \sin^2 \frac{1}{2} w = \frac{(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2)c'^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)c'^2 - (a_1c_1' + a_2c_2' + a_3c_3')^2},$$

et cette équation détermine l'amplitude de la rotation.

Faisons maintenant passer le système Σ de Σ_1 à Σ_2 au moyen d'une rotation autour de l'axe de torsion et de la translation δ_0.

En choisissant un point de cet axe comme origine des coordonnées, les axes du nouveau système de coordonnées étant parallèles à ceux du système primitif, on a, si $\rho = x_1 \varepsilon_1 + y_1 \varepsilon_2 + z_1 \varepsilon_3$ est le rayon vecteur d'un point quelconque $U = U_1$ de $\Sigma = \Sigma_1$ et $\psi = x \varepsilon_1 + y \varepsilon_2 + z \varepsilon_3$ le rayon vecteur du point correspondant dans $\Sigma = \Sigma_2$, après le déplacement de Σ,

$$\psi = (\varepsilon | \rho)\varepsilon + \cos w(\varepsilon\rho) | \varepsilon + \sin w | (\varepsilon\rho) + \delta_0,$$

d'où, en posant

$$\varepsilon = \frac{1}{c'}(c_1'\varepsilon_1 + c_2'\varepsilon_2 + c_3'\varepsilon_3) = e_1\varepsilon_1 + e_2\varepsilon_2 + e_3\varepsilon_3,$$

$$\begin{aligned} x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 = {} & (1 - \cos w)(e_1x_1 + e_2y_1 + e_3z_1)(e_1\varepsilon_1 + e_2\varepsilon_2 + e_3\varepsilon_3) \\ & + \cos w(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3) \\ & + \sin w \left\{ (e_2z_1 - e_3y_1)\varepsilon_1 + (e_3x_1 - e_1z_1)\varepsilon_2 + (e_1y_1 - e_2x_1)\varepsilon_3 \right\} \\ & + d_0'\varepsilon_1 + d_0''\varepsilon_2 + d_0'''\varepsilon_3, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 = {} & \left\{ (1 - \cos w)(e_1^2x_1 + e_1e_2y_1 + e_3e_1z_1) + \cos w x_1 \right. \\ & \left. + \sin w(e_2z_1 - e_3y_1) + d_0' \right\} \varepsilon_1 \\ & + \left\{ (1 - \cos w)(e_1e_2x_1 + e_2^2y_1 + e_2e_3z_1) + \cos w y_1 \right. \\ & \left. + \sin w(e_3x_1 - e_1z_1) + d_0'' \right\} \varepsilon_2 \\ & + \left\{ (1 - \cos w)(e_3e_1x_1 + e_2e_3y_1 + e_3^2z_1) + \cos w z_1 + \sin w(e_1y_1 - e_2x_1) + d_0''' \right\} \varepsilon_3. \end{aligned}$$

De cette équation on déduit directement les coordonnées du point U (x, y, z) du système Σ après le déplacement.

Si l'on fait coïncider l'axe de z du deuxième système de coordonnées avec l'axe de torsion, l'on a $\varepsilon = \varepsilon_3$, $e_1 = e_2 = 0$, $e_3 = 1$, $d_0' = d_0'' = 0$, $d_0''' = d_0$, ce qui entraîne

$$x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 = \left\{ \cos w x_1 - \sin w y_1 \right\} \varepsilon_1 + \left\{ \cos w y_1 + \sin w x_1 \right\} \varepsilon_2 + \left\{ z_1 + d_0 \right\} \varepsilon_3,$$

d'où

$$x = \cos w x_1 - \sin w y_1 \quad y = \cos w y_1 + \sin w x_1, \quad z = z_1 + d_0.$$

§ 11. — Par ce moyen est résolu le problème du déplacement d'un système invariable Σ, qui passe d'une manière quelconque d'une position donnée Σ_1 dans une autre position donnée Σ_2, en ce qui concerne son mouvement le plus simple et son système de vitesses.

On peut aussi effectuer la solution de ce problème au moyen de la multiplication algébrique du facteur de déplacement. La publication de cette dernière solution est réservée pour une autre époque.

FERDINAND KRAFT (Zurich).