BIBLIOGRAPHIE

Em. Borel. — **Leçons sur les séries à termes positifs.** *Professées au Collège de France. Recueillies et rédigées par Robert d'Adhémar.* — Un volume gr. in-8°, 91 p.; prix : 3 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris, 1902.

En lisant ce livre on a l'impression que le rédacteur n'a pas su rendre avec assez de précision l'idée du professeur. Bien souvent, en effet, on désire plus de rigueur dans le développement des théories. Les démonstrations ne sont pas toujours exactes et la forme laisse quelquefois à désirer.

Ce que le livre a de nouveau, c'est principalement l'usage de symboles propres à représenter les degrés d'infinitude des fonctions croissant plus rapidement que l'exponentielle e^x, ou moins rapidement que la fonction logarithmique $\log x$.

Il y a cependant, une question fondamentale qui demeure irrésolue, à savoir : les critères sur lesquelles les auteurs s'appuient pour définir l'égalité ou la majorité de la croissance des fonctions. Ces critères peuvent être établis d'une infinité de façons différentes indépendamment de la représentation symbolique des degrés d'infinitude. Mais, lorsqu'on ne dit pas expressément le contraire, il semble toujours sous-entendu que l'on se rapporte à la méthode classique qui se rattache à la considération du quotient des fonctions qu'on veut comparer.

M. Borel paraît, au premier abord, ne pas vouloir s'écarter de cette méthode. Non seulement, en effet, il ne s'occupe pas exprès de la question, mais dans plusieurs endroits il semble bien accepter la solution générale que je viens de rappeler.

Je citerai les phrases :

« Notre but est d'étendre la théorie des ordres d'infinitude à des cas où la valeur que l'on serait conduit à leur attribuer serait zéro ou l'infini.

« Dans ce but, nous conviendrons de dire que, x étant l'infiniment petit principal... (1).

« Dans tout ceci, certains coefficients constants sont sans importance. Ainsi e^x, ou $3e^x$, c'est pour nous la même chose, car c'est le même mode de croissance » (2).

En laissant donc de côté la nature et les lois de formation des symboles qu'on introduit dans le livre, on pense toujours que deux fonctions auxquelles

(1) Cf. *Sur les ordres d'infinitude.* Note publiée par le *Bull. de la Soc. Math. de France.* 1901. p. 154.

(2) Cf. la note à la p. 35 du texte.

va être attribué un même symbole, seront censées avoir un rapport fini et réciproquement.

Il n'en est rien. Dès la première notation qu'il propose, c'est-à-dire, lorsqu'il définit l'ordre (μ) par la condition que l'on aie, quel que soit le nombre positif ε,

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x^{\mu+\varepsilon}} = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y}{x^{\mu-\varepsilon}} = \infty,$$

(p. 36) on se représente des fonctions comme :

$$y_1 = x^{\mu+\varepsilon(x)}, \quad y_2 = x^{\mu-\varepsilon(x)} \qquad \left(\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0\right)$$

qui ont même ordre (μ), et dont le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ est infini toutes les fois que la fonction $\varepsilon(x)$ décroît assez lentement pour que

$$\lim_{x=\infty} \log x.\ \varepsilon(x) = \infty.$$

L'introduction des symboles ω^n ne fait qu'augmenter cette indétermination. On le voit très aisément et je n'insiste pas là-dessus. Je veux seulement signaler la *Remarque II* (p. 43), à la suite de laquelle *le degré* 2 *de la fonction* x^2 *se trouve différencié du degré* $\frac{1}{\omega}c\omega^2$ *de la fonction* cx^2, *et la différence des degrés de deux fonctions telles que* z *et* $y = z + 1$ *est mise en évidence par les symboles* ω^{-3}, ω^{2} e ω^{-1}.

Cette remarque, en évidente contradiction avec la note à la page 35 que j'ai citée, ne pourrait s'expliquer sinon en admettant que : *Deux fonctions ont même degré alors et alors seulement si l'on peut leur attribuer un même symbole.*

A part l'arbitraire d'une telle définition, il faut observer en premier lieu que : *Les lois de compositions des symboles de M. Borel ne donnent aucun critère pour ordonner l'ensemble de ces symboles, et que pourtant la question de savoir laquelle entre deux fonctions données a la plus grande croissance, demeure irrésolue même lorsqu'on connaît les symboles qu'il faut leur attribuer.*

En outre, dans le courant de l'œuvre, en voulant donner des critères pour l'assignation de ces symboles, voire même les déterminer dans des cas particuliers ; on se sert de la connaissance du symbole attribué à une autre fonction à laquelle la fonction à étudier est dite *comparable* ou *du même degré*, ce qui nous porte à un cercle vicieux.

D'autant plus que maintes fois les fonctions dont il s'agit ne sont nullement comparables, si avec ce mot on se rapporte à la théorie ordinaire des infinis :

Je citerai les pages 64, 82, où l'on lit :

..... *en remarquant que* $n!$ *est comparable à* n^n, *donc* $(n!)^p$ *à* n^{np}.....

..... *puisque* p^p *est asymptotiquement peu différent de* $p!$.....

Et je ferai observer que *le rapport* $\frac{n^n}{n!}$ *croît plus rapidement que toute puissance finie* n^p *de* n.

En somme, dans ce livre, on n'a pas conservé les définitions classiques d'égalité et d'inégalité dans les ordres d'infinitude, on n'en a pas donné des nouvelles, et l'on a, avec cela, introduit des symboles avant de bien préciser les idées qu'ils doivent représenter.

L'utilité de ces symboles est donc bien douteuse, et les propositions où ils sont employés demandent à être éclaircies.

Par exemple, lorsqu'on trouve à la page 58, la proposition :

..... *Le degré de* $f'(x)$, *en fonction de* $f(x)$ *est moindre que :*

$$1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \ldots + \frac{1+\alpha}{\omega^\mu} \quad (\alpha \leqq 0)$$

.... *La limite est la croissance de la fonction idéale* .....

et à la page 70 :

.... *Si* k *est très voisin de un, le degré* $\omega\left(\frac{k}{1-k}\right)$ *est très grand* .....

On ne connaît pas le sens des mots *moindre, limite, très-grand,* etc.

Peut-être ces incohérences, seraient-elles moins évidentes avec une rédaction plus soigneuse.

Par exemple, à la page 45, on veut tirer des critères, qu'on dit très utiles pour la détermination des ordres d'infinitude, de la considération, manifestement fausse, que *si* $\frac{y}{y'}$ *est infiniment grand,* $\frac{\int^x y\,dx}{y}$ *sera de même degré.* (Il suffit de prendre $y = \log x$ pour voir tomber en défaut cette assertion).

Encore : la démonstration qui se trouve à la page 59 et qui a une importance capitale pour la belle méthode du *terme maximum de M. Borel,* n'est pas complète.

On n'a pas tenu compte du fait que la quantité ε^m, dans la formule

$$\left(1 + \frac{m-m'}{m}\right)^{\mu m} = e^{(m-m')^p} + \varepsilon_m$$

est négative et variable avec $m - m'$.

A la page 61, on n'a pas observé que si on fait, p et $\varphi(n) = n^{\frac{1}{lg\,(lgn)}}$, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{\frac{1}{\log(\log n)}}}{e^{\log(\log n)} - 1} = \infty$$

et que la somme $1 + e^{-p} + e^{-2p} + \ldots$, n'est plus finie.

Ajoutons pour terminer que, quant à la forme de l'exposé, on rencontre un certain nombre d'incorrections et que les fautes d'impressions sont assez nombreuses pour témoigner de la hâte avec laquelle ce livre a été rédigé et publié.

Ettore Bortolotti (Modena).

Maurice Godefroy. — **Théorie élémentaire des séries.** Un volume de 266 p. gr. in-8°, prix : 8 francs. Gauthier-Villars, Paris 1903.

En groupant les points principaux de la théorie des séries, M. Godefroy a écrit un livre utile qui sera apprécié. On ne saurait assez recommander l'étude des questions qui y sont traitées. Les séries interviennent dans presque tous les problèmes posés par l'analyse, elles sont d'un usage constant en astronomie et en physique.

Dans le premier chapitre de son livre M. Godefroy définit les notions si importantes de limite et de continuité : limite d'une variable, limite d'une fonction, fonction continue dans un intervalle, à droite, à gauche, etc., fonction dérivable. Ce chapitre sert d'introduction.

Les principes de la théorie des séries et les propriétés des séries à termes constants sont exposés dans le chapitre suivant. Il contient les définitions des notions fondamentales, les règles de convergence les plus usuelles et les points principaux de la théorie des séries alternées et des séries de séries.

On y remarquera quelques exemples curieux (entre autres la série de Césàro et celle de Lambert). L'auteur passe ensuite à la théorie des séries à termes variables et plus particulièrement à celle des séries entières. La notion si délicate de convergence uniforme est élucidée par un exemple que l'on doit à Paul du Bois-Reymond.

A la théorie des séries entières est rattachée celle des polynômes de Legendre et de la série hypergéométrique. L'auteur établit ensuite les formules de Taylor et de Mac-Laurin.

Les trois derniers chapitres, qui forment les deux tiers du livre, sont consacrés à l'étude détaillée de la fonction exponentielle, des fonctions circulaires et de la fonction gamma. La fonction exponentielle et les fonctions circulaires sont définies au moyen de leurs développements en série, ce qui n'est pas nouveau, mais la façon dont l'auteur en déduit les propriétés caractéristiques de ces fonctions, la clarté de l'exposition, le grand intérêt des questions qui sont traitées dans cette partie du livre, en rendent la lecture particulièrement attachante. Comme application, l'auteur étudie les polynômes de Hermite, les fonctions de Bessel, les polynômes de Bernoulli. Signalons encore une théorie des logarithmes et des fonctions hyperboliques et la démonstration de la transcendance du nombre *e*.

Le dernier chapitre est consacré à la fonction gamma définie comme limite d'un produit. Ce chapitre est curieux et sera lu avec intérêt.

On trouve à la fin des chapitres de précieuses indications bibliographiques et des exercices.

Ajoutons que l'auteur se borne à la considération du domaine réel. Malgré cela l'ouvrage de M. Godefroy est moderne. Son caractère distinctif est la clarté et il pourra être lu par tous ceux qui connaissent les éléments du Calcul différentiel. Le livre est précédé d'une belle préface de M. Sauvage.

D. Mirimanoff (Genève).

Edouard Cannwel. — **La rotation de la terre démontrée par le pendule de Foucault; appareil des écoles**, in-8°, 35 p.; chez l'auteur, Levallois-Perret (Seine).

Cette petite brochure accompagne l'appareil imaginé et construit par M. Cannwel, pour reproduire l'expérience de Foucault dans la plus modeste école et même chez soi. Ce pendule de Foucault réduit, ce qui permet cependant de constater parfaitement la rotation apparente du plan d'oscillation, a été présenté par M. d'Arsonval, le 17 novembre 1902, à l'Académie des sciences. Le problème pratique n'était pas facile à résoudre, car la question de la suspension du fil surtout est chose fort délicate. M. Cannwel y est parvenu par des moyens très simples et qui n'exigent qu'un peu d'attention et de soin, sans aucune habileté spéciale d'expérimentation.

La brochure, où figure en tête un portrait de Foucault, contient les notices consacrées à cet illustre physicien, par J. Bertrand et M. Gariel; la communication de Foucault sur le pendule, lue par Arago à l'Académie des Sciences le 3 février 1851; celle de M. d'Arsonval, du 17 novembre 1902, rappelée ci-dessus; des extraits des discours de M. Flammarion et de M. Chaumié, ministre de l'Instruction publique, prononcés lors de la réinstallation du pendule de Foucault au Panthéon, le 22 octobre 1902: une note très claire de l'auteur sur son appareil et quelques documents complémentaires; le tout accompagné de nombreuses figures qui achèvent de faciliter la lecture.

Grâce à l'appareil de M. Caunwel, il devient possible à tout instituteur, de *montrer* à ses élèves la rotation de la terre, en plaçant sous leurs yeux la reproduction d'une expérience célèbre, qui semblait possible seulement jusqu'ici dans des conditions très exceptionnelles et très onéreuses. Nous estimons qu'il a rendu de la sorte un important service à l'enseignement élémentaire de l'astronomie. L'installation de ce petit pendule, dans toutes les écoles, serait une juste glorification du génie de Galilée et de celui de Léon Foucault. C.-A. L.

C. Alasia. — **I complementi di Geometrica elementare**, 1 vol. XV-244 p., 117 fig.; prix L. 1,50; Milan, Hœpli, 1903.

Ce petit volume appartient à la collection des manuels Hœpli. Voici les titres des divers chapitres qui le composent :

Vecteurs. — Généralités sur les polyèdres. — Mesure des polygones et des polyèdres. — Symétrie. — Superposition des figures. — Homothétie. — Similitude. — Maximum et minimum en géométrie. — Transversales. — Puissance d'un point par rapport à un cercle; axes radicaux, centres radicaux. — Involutions. — Pôles et polaires. — Inversion. — Les sections coniques.

Cette énumération sommaire suffit à donner une idée des ressources que présentera pour tout bon élève moyen la lecture de cet ouvrage modeste, et fort utile. L'exposition est claire, l'ordonnance est très méthodique, et plus d'un professeur n'aura qu'à y gagner.

C.-A. L.