Em. Borel. — Leçons sur les séries à termes positifs. Professées au Collège de France. Recueillies et rédigées par Robert d'Adhémar. — Un volume gr. in-8°, 91 p.; prix : 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris, 1902.

Autor(en): **Bortolotti, Ettore**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

BIBLIOGRAPHIE

Em. Borel. — **Leçons sur les séries à termes positifs.** *Professées au Collège de France. Recueillies et rédigées par Robert d'Adhémar.* — Un volume gr. in-8°, 91 p.; prix : 3 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris, 1902.

En lisant ce livre on a l'impression que le rédacteur n'a pas su rendre avec assez de précision l'idée du professeur. Bien souvent, en effet, on désire plus de rigueur dans le développement des théories. Les démonstrations ne sont pas toujours exactes et la forme laisse quelquefois à désirer.

Ce que le livre a de nouveau, c'est principalement l'usage de symboles propres à représenter les degrés d'infinitude des fonctions croissant plus rapidement que l'exponentielle e^x, ou moins rapidement que la fonction logarithmique $\log x$.

Il y a cependant, une question fondamentale qui demeure irrésolue, à savoir : les critères sur lesquelles les auteurs s'appuient pour définir l'égalité ou la majorité de la croissance des fonctions. Ces critères peuvent être établis d'une infinité de façons différentes indépendamment de la représentation symbolique des degrés d'infinitude. Mais, lorsqu'on ne dit pas expressément le contraire, il semble toujours sous-entendu que l'on se rapporte à la méthode classique qui se rattache à la considération du quotient des fonctions qu'on veut comparer.

M. Borel paraît, au premier abord, ne pas vouloir s'écarter de cette méthode. Non seulement, en effet, il ne s'occupe pas exprès de la question, mais dans plusieurs endroits il semble bien accepter la solution générale que je viens de rappeler.

Je citerai les phrases :

« Notre but est d'étendre la théorie des ordres d'infinitude à des cas où la valeur que l'on serait conduit à leur attribuer serait zéro ou l'infini.

« Dans ce but, nous conviendrons de dire que, x étant l'infiniment petit principal... (1).

« Dans tout ceci, certains coefficients constants sont sans importance. Ainsi e^x, ou $3e^x$, c'est pour nous la même chose, car c'est le même mode de croissance » (2).

En laissant donc de côté la nature et les lois de formation des symboles qu'on introduit dans le livre, on pense toujours que deux fonctions auxquelles

(1) Cf. *Sur les ordres d'infinitude.* Note publiée par le *Bull. de la Soc. Math. de France.* 1901, p. 154.

(2) Cf. la note à la p. 35 du texte.

va être attribué un même symbole, seront censées avoir un rapport fini et réciproquement.

Il n'en est rien. Dès la première notation qu'il propose, c'est-à-dire, lorsqu'il définit l'ordre (μ) par la condition que l'on aie, quel que soit le nombre positif ε,

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x^{\mu+\varepsilon}} = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y}{x^{\mu-\varepsilon}} = \infty,$$

(p. 36) on se représente des fonctions comme :

$$y_1 = x^{\mu+\varepsilon(x)}, \quad y_2 = x^{\mu-\varepsilon(x)} \quad \left(\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0\right)$$

qui ont même ordre (μ), et dont le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ est infini toutes les fois que la fonction $\varepsilon(x)$ décroît assez lentement pour que

$$\lim_{x=\infty} \log x.\ \varepsilon(x) = \infty.$$

L'introduction des symboles ω^n ne fait qu'augmenter cette indétermination.

On le voit très aisément et je n'insiste pas là-dessus. Je veux seulement signaler la *Remarque II* (p. 43), à la suite de laquelle *le degré 2 de la fonction* x^2 *se trouve différencié du degré* $\frac{1}{\omega} c\omega 2$ *de la fonction* cx^2, *et la différence des degrés de deux fonctions telles que* z *et* y = z + 1 *est mise en évidence par les symboles* $\overset{-3}{\omega}$, $\overset{2}{\omega} e \overset{-1}{\omega}$.

Cette remarque, en évidente contradiction avec la note à la page 35 que j'ai citée, ne pourrait s'expliquer sinon en admettant que : *Deux fonctions ont même degré alors et alors seulement si l'on peut leur attribuer un même symbole.*

A part l'arbitraire d'une telle définition, il faut observer en premier lieu que : *Les lois de compositions des symboles de M. Borel ne donnent aucun critère pour ordonner l'ensemble de ces symboles, et que pourtant la question de savoir laquelle entre deux fonctions données a la plus grande croissance, demeure irrésolue même lorsqu'on connaît les symboles qu'il faut leur attribuer.*

En outre, dans le courant de l'œuvre, en voulant donner des critères pour l'assignation de ces symboles, voire même les déterminer dans des cas particuliers ; on se sert de la connaissance du symbole attribué à une autre fonction à laquelle la fonction à étudier est dite *comparable* ou *du même degré*, ce qui nous porte à un cercle vicieux.

D'autant plus que maintes fois les fonctions dont il s'agit ne sont nullement comparables, si avec ce mot on se rapporte à la théorie ordinaire des infinis :

Je citerai les pages 64, 82, où l'on lit :

..... *en remarquant que* n ! *est comparable à* n^n, *donc* $(n!)^p$ *à* n^{np}.....

..... *puisque* p^p *est asymptotiquement peu différent de* p !.....

Et je ferai observer que *le rapport* $\frac{n^n}{n!}$ *croît plus rapidement que toute puissance finie* n^p *de* n.

En somme, dans ce livre, on n'a pas conservé les définitions classiques d'égalité et d'inégalité dans les ordres d'infinitude, on n'en a pas donné des nouvelles, et l'on a, avec cela, introduit des symboles avant de bien préciser les idées qu'ils doivent représenter.

L'utilité de ces symboles est donc bien douteuse, et les propositions où ils sont employés demandent à être éclaircies.

Par exemple, lorsqu'on trouve à la page 58, la proposition :

..... *Le degré de* f' (x), *en fonction de* f (x) *est moindre que :*

$$1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \ldots + \frac{1+\alpha}{\omega^\mu} \quad (\alpha \leq 0)$$

.... *La limite est la croissance de la fonction idéale .....*

et à la page 70 :

.... *Si* k *est très voisin de un, le degré* $\omega \left(\frac{k}{1-k}\right)$ *est très grand .....*

On ne connaît pas le sens des mots *moindre, limite, très-grand,* etc.

Peut-être ces incohérences, seraient-elles moins évidentes avec une rédaction plus soigneuse.

Par exemple, à la page 45, on veut tirer des critères, qu'on dit très utiles pour la détermination des ordres d'infinitude, de la considération, manifestement fausse, que *si* $\frac{y}{y'}$ *est infiniment grand,* $\frac{\int^x y\,dx}{y}$ *sera de même degré.* (Il suffit de prendre $y = \log x$ pour voir tomber en défaut cette assertion).

Encore : la démonstration qui se trouve à la page 59 et qui a une importance capitale pour la belle méthode du *terme maximum de M. Borel,* n'est pas complète.

On n'a pas tenu compte du fait que la quantité ε^m, dans la formule

$$\left(1 + \frac{m - m'}{m}\right)^{\mu m} = e^{(m-m')^p} + \varepsilon_m$$

est négative et variable avec $m - m'$.

A la page 61, on n'a pas observé que si on fait, p et $\varphi(n) = n^{\frac{1}{lg\,(lgn)}}$, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{\frac{1}{\log(\log n)}}}{e^{\log(\log n)} - 1} = \infty$$

et que la somme $1 + e^{-p} + e^{-2p} + \ldots$, n'est plus finie.

Ajoutons pour terminer que, quant à la forme de l'exposé, on rencontre un certain nombre d'incorrections et que les fautes d'impressions sont assez nombreuses pour témoigner de la hâte avec laquelle ce livre a été rédigé et publié.

ETTORE BORTOLOTTI (Modena).

MAURICE GODEFROY. — **Théorie élémentaire des séries.** Un volume de 266 p. gr. in-8°, prix : 8 francs. Gauthier-Villars, Paris 1903.

En groupant les points principaux de la théorie des séries, M. Godefroy a écrit un livre utile qui sera apprécié. On ne saurait assez recommander