

SUR UNE AMÉLIORATION DE LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON

Autor(en): **Lerch, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-7563>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR UNE AMÉLIORATION DE LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON

Etant donné un système d'équations analytiques à n inconnues

$$(1) \quad f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_n = 0,$$

dont on connaît une solution approchée x_1, x_2, \dots, x_n , on trouve un système de valeurs avec l'approximation plus avancée

$$(2) \quad x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n,$$

si l'on détermine les corrections δx_ν au moyen des équations linéaires

$$(2^*) \quad \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots, n).$$

C'est la méthode de Newton. Cela posé, pour juger l'approximation obtenue, on calcule les valeurs

$$f_\mu(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n);$$

je dis qu'on perfectionne considérablement les résultats, si au moyen des quantités qu'on vient d'obtenir on détermine les corrections secondes $\delta' x_\nu$ par les équations

$$(3) \quad \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\nu} f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) \delta' x_\nu + f_\mu(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots) = 0$$

et qu'on prenne $x_\nu + \delta x_\nu + \delta' x_\nu$ comme les valeurs des inconnues.

Démonstration. — En écrivant les inconnues sous la forme $x_\nu + dx_\nu$, et faisant usage du théorème de Taylor, on aura les équations exactes

$$(4) \quad 0 = f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} d^p f_\mu.$$

En supprimant les séries qui figurent aux deuxièmes membres, on aura un système linéaire pour les inconnues $dx_\nu = \delta x_\nu$, qui est exactement le système d'équations de Newton (2*).

Cela posé, j'obtiendrai une solution plus satisfaisante, si au lieu de supprimer les séries dans les équations (4), je leur substitue des valeurs approchées formées au moyen des différentielles $dx_\nu = \delta x_\nu$. Or on a, dans cette hypothèse,

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} d^p f_\mu = f_\mu(\dots x_\nu + \delta x_\nu \dots) - f_\mu(\dots x_\nu \dots) - \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\nu ;$$

en substituant ces valeurs, les équations (4) deviennent

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} (dx_\nu - \delta x_\nu) + f_\mu(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n) = 0 ,$$

d'où il vient le système (3), si l'on fait $dx_\nu - \delta x_\nu = \delta' x_\nu$, ce qui achève la démonstration.

Dans le cas d'une seule inconnue, la méthode s'exprime par les deux équations

$$\delta x = - \frac{f(x)}{f'(x)} , \quad \delta' x = - \frac{f(x + \delta x)}{f'(x)} ,$$

x étant la valeur approchée donnée, et $x + \delta x + \delta' x$ la valeur améliorée obtenue par la méthode.

Pour éclaircir sur un exemple, je prends l'équation $x^3 - 5 = 0$ qui a la solution 1, 7099759 ; je fais $x = 1, 71$ et je détermine les valeurs

$$f(x) = 0, 000211 , \quad f'(x) = 8, 7723 ,$$

d'où

$$\delta x = - 0, 000024052 , \\ x + \delta x = 1, 709975948 .$$

Je détermine ensuite pour le contrôle

$$f(x + \delta x) = - \frac{29679}{10^{13}} ,$$

d'où

$$\delta' x = - \frac{f(x + \delta x)}{f'(x)} = \frac{30755}{10^{14}} ,$$

ce qui donne la valeur de l'inconnue

$$x + \delta x + \delta' x = 1, 70997594769245 .$$

M. LERCH (Fribourg, Suisse).