LA LOGIQUE SYMBOLIQUE

(Deuxième article[1].)

---

24. — Dans cet article je vais discuter la validité de certaines formules en indiquant, en même temps, certains pièges dans lesquels tombent souvent nos raisonnements. Soit $\varphi(x, y, z)$, ou simplement φ, une proposition fonctionnelle, dont chaque symbole, x, y, z, peut représenter n'importe quel individu d'une série *infinie* de symboles, α_1, α_2, α_3, etc. Par exemple, lorsque x, y, z, représentent respectivement α_8, α_2, α_8, alors $\varphi(x, y, z)$ doit représenter $\varphi(\alpha_8, \alpha_2, \alpha_8)$. Que $\varphi_\alpha(x, y, z,)$ ou simplement φ_α, représente $\varphi(x, y, z)$ lorsque les valeurs de x, y, z, et, par conséquent, de $\varphi(x, y, z)$, sont *limitées*. Par exemple, si le symbole x est limité aux quatre valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, le symbole y aux valeurs $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7$, et le symbole z aux valeurs $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8$; alors nous écrivons φ_α, et non pas φ. Les symboles φ^ε, φ^η, φ^θ affirment respectivement que φ est *certaine*, que φ est *impossible*, que φ est *variable;* et pareillement pour les symboles $\varphi^\varepsilon_\alpha$, φ^η_α, φ^θ_α. Ici le mot *certaine* veut dire vraie pour toutes les valeurs admissibles des symboles x, y, z; *impossible* veut dire fausse pour toutes leurs valeurs admissibles; tandis que le mot *variable* veut dire *ni certaine, ni* impossible. Donc φ^θ est synonyme de $\varphi^{-\varepsilon}\varphi^{-\eta}$, et de $(\varphi^\varepsilon)'(\varphi^\eta)'$.

25. — De ces conventions symboliques nous déduisons les trois formules

$$(1)\quad \varphi^\varepsilon : \varphi^\varepsilon_\alpha, \qquad (2)\quad \varphi^\eta : \varphi^\eta_\alpha, \qquad (3)\quad \varphi^\theta_\alpha : \varphi^\theta.$$

Mais les trois implications converses ne sont pas nécessairement vraies, de sorte que nous ne devons pas rempla-

---

[1] Pour le premier article voir *L'Enseignement mathématique*, p 415, novembre 1903.

cer le signe d'implication : par le signe d'équivalence $=$. Les deux premières formules n'ont pas besoin de preuve ; mais la troisième est moins évidente. Je la prouve donc comme suit, en prenant les deux premières formules comme données, et, par conséquent, comprises dans la classe ε, qui indique les *certitudes*. Soit F_1, F_2, F_3 les trois formules. Nous aurons

$$\varepsilon : F_1 F_2 : (\varphi^{\varepsilon} : \varphi_{\alpha}^{\varepsilon}) (\varphi^{\eta} : \varphi_{\alpha}^{\eta}) : (\varphi_{\alpha}^{-\varepsilon} : \varphi^{-\varepsilon}) (\varphi_{\alpha}^{-\eta} : \varphi^{-\eta})$$

$$: (\varphi_{\alpha}^{-\varepsilon} \varphi_{\alpha}^{-\eta} : \varphi^{-\varepsilon} \varphi^{-\eta}) : (\varphi_{\alpha}^{\theta} : \varphi^{\theta}) : F_3 ;$$

ce qui prouve la validité de la formule F_3, ou son synonyme $\left(\varphi_{\alpha}^{\theta} : \varphi^{\theta}\right)$.

26. — Maintenant pour l'application. Soit X et Y deux classes appartenant à notre « Univers du discours », c'est-à-dire à l'ensemble de toutes les choses et des classes, *réelles*, *imaginaires* ou *impossibles*, dont nous faisons mention dans notre argument ou raisonnement. Soit P un individu pris au hasard dans notre Univers du discours. Que x, y, z représentent respectivement les trois propositions P^X, P^Y, P^Z ; alors, x', y', z' doivent représenter P^{-X}, P^{-Y}, P^{-Z}. Par notre définition, tous les individus formant les classes X, Y, Z appartiennent à notre Univers du discours ; donc les trois propositions P^X, P^Y, P^Z, comme leurs synonymes x, y, z, *sont toujours possibles,* de sorte qu'*aucun des cas* x^{η}, y^{η}, z^{η} *ne peut jamais se présenter.* Avec ces conventions symboliques, nous aurons (voir § 17)

Tout X est Y $= P^X : P^Y = x : y = (xy')^{\eta}$

Quelque X n'est pas Y $= (P^X : P^Y)' = (x : y)' = (xy')^{-\eta}$

Nul X n'est Y $= P^X : P^{-Y} = x : y' = (xy)^{\eta}$

Quelque X est Y $= (P^X : P^{-Y})' = (x : y')' = (xy)^{-\eta}$

Donc, nous pouvons exprimer tout syllogisme de la logique traditionnelle en termes de x, y, z. Mais, puisque aucune des propositions x, y, z ne peut, dans ce cas, appartenir à la classe η, les valeurs de x, y, z sont *limitées*. Donc, chaque syllogisme exprimé en termes de x, y, z doit être représenté par une fonction de la forme $\varphi_\alpha(x, y, z)$, ou son abrégé φ_α, qui indique que les valeurs x, y, z sont limitées, et non pas par une fonction de la forme $\varphi(x, y, z)$, ou son abrégé φ, qui laisserait supposer qu'il n'y a pas de restrictions sur les valeurs de x, y, z. Supposons maintenant que φ représente l'implication

$$(y : z)(y : x) : (x : z')' .$$

Si nous supposons que les propositions x, y, z soient limitées par les conventions du § 26, le syllogisme *Darapti* sera représenté par φ_α et non par φ. Par la première formule du § 25, nous avons $\varphi^\varepsilon : \varphi_\alpha^\varepsilon$ et, par conséquent, $\varphi_\alpha^\varepsilon : \varphi^{-\varepsilon}$, mais non pas nécessairement $\varphi^{-\varepsilon} : \varphi^{-\varepsilon}$.

Donc, si φ est valide (c'est-à-dire vraie pour toutes les valeurs, sans limite, des variables x, y, z), *Darapti* doit être valide aussi. Nous trouvons que φ *n'est pas valide*, car cette implication est fausse dans le cas $y^\eta(xz)^\eta$. Mais, puisque $\varphi^{-\varepsilon}$ n'implique pas nécessairement $\varphi_a^{-\varepsilon}$, cette découverte *ne nous donne pas le droit de conclure que Darapti n'est pas valide.* Le seul cas où la formule générale φ est fausse est $y^\eta(xz)^\eta$, et *ce cas ne peut pas se présenter* dans la formule limitée φ_α qui représente Darapti, parce que, dans φ_α, les propositions x, y, z sont toujours possibles (voir § 26).

27. — Il est vrai que si nous représentons les deux prémisses de n'importe quel syllogisme de la logique traditionnelle par P_1P_2, et la conclusion par Q, ce syllogisme (comme je l'ai prouvé § 19) n'est pas valide sous sa forme traditionnelle et ordinaire de $P_1P_2 \therefore Q$; donc, sous cette forme, Darapti, comme tous les autres 18 syllogismes, n'est pas valide. Mais Darapti, comme tous les 18 autres, est valide sous la forme $P_1P_2 : Q$, qui n'affirme ni P_1 ni P_2 ni Q, mais seulement $(P_1P_2Q')^\eta$. On peut dire la même chose des syllogismes Felapton, Fesapo, Bramantip, que je croyais à tort être des exceptions (voir § 18).

HUGH MAC COLL. (Université de Londres).

P.-S. — Mon système de logique est fondé sur des principes essentiellement différents de ceux sur lesquels sont bâtis les autres systèmes. Les ressemblances qui se présentent çà et là ne sont que des ressemblances de *forme*, de simples ressemblances *symboliques*. Par exemple, la formule $x(y+z)=xy+xz$, se trouve dans plusieurs systèmes; mais dans aucun elle n'a la même signification que dans le mien. Je peux dire la même chose des symboles 0 et $=$. La proposition $(A=B)$ dans mon système veut dire $(AB+A'B')^{\varepsilon}$, signification qu'elle n'a dans aucun autre. Mon symbole 0 exprime une *classe* de choses *non-réelles*, comme *fées centaures, cercles carrés, triangles ronds*, etc.; les *individus* composant la classe étant 0_1, 0_2, 0_3, etc., exactement comme n'importe quelle classe A, réelle ou non-réelle, se compose des individus A_1, A_2, A_3, etc. La proposition A° affirme que l'individu A qui se trouve dans la série A_1, A_2, A_3, etc., se trouve aussi dans la série 0_1, 0_2, 0_3, etc. Autrement dit la proposition A° affirme que l'individu A n'a qu'une *existence symbolique*, de sorte que l'on peut traduire A° en langage ordinaire par « il n'y a pas de A ».

Toutes ces conventions (ou définitions) sont tellement différentes des conventions des autres systèmes, ainsi que des conventions mathématiques, que le syllogisme que j'appelle « Darapti » pourrait bien être un syllogisme tout différent de ce que les autres logiciens appellent « Darapti ». Dans ce cas je n'ai pas le droit de dire que les raisonnements de ceux qui n'acceptent pas mes conclusions à l'égard de ce syllogisme ne sont pas valides, pas plus qu'ils n'ont le droit de faire le même reproche aux miens. A propos de cette question de principe je citerai l'anecdote suivante :

Pendant la guerre du Transvaal deux soldats blessés, l'un Ecossais, l'autre Boer, se trouvent sous le même toit. L'Ecossais, pensant à sa ville natale, dit : « A présent il fait froid à Glencoe ». L'autre étonné, répond : « Mais non; à présent il fait chaud à Glencoe ». Malgré la contradiction apparente, chacun avait parfaitement raison. Car l'un parlait du Glencoe en Ecosse, tandis que l'autre parlait d'un autre Glencoe, dans le Natal.