SUR LES POINTS DE DIVERGENCE D'UNE SÉRIE

Autor(en): **Popovici, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-7575

SUR LES POINTS DE DIVERGENCE D'UNE SÉRIE

Il arrive souvent qu'une fonction soit continue en un point autour duquel son développement en série est divergent.

P. ex. : Les fonctions $L(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$ peuvent être représentées par les séries :

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \text{ et } 1 - x + x^2 - \dots$$

dans un cercle de rayon égal à l'unité. La première série est convergente même sur le cercle mais non la seconde.

Eh bien ! Dans ce cas en considérant nos fonctions comme des intégrales d'une équation différentielle, on peut les développer en séries de polynomes valables dans tout le plan, sauf les rayons suivant lesquels ces intégrales sont discontinues. (Mittag-Leffler.)

P. ex. La fonction : $y = \frac{1}{1+x}$ est l'intégrale de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$ qui pour $x = 0$ se réduit à $y = 1$. Alors la fonction $y = \frac{1}{1+x}$ est développable en série de polynomes dans tout le plan sauf le rayon $x = -1 \dots -\infty$ et l'on obtient cette série en calculant par des approximations successives l'intégrale de $\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$ qui se réduit pour $x = 0$ à $y = 1$.

La question est bien claire pour le développement en série de polynomes ; quant au développement en série entière il se présente une anomalie telle que celle-ci :

Dans l'égalité

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots,$$

le premier membre prend la valeur $\frac{1}{2}$ et le deuxième 1 ou 0, pour $x = 1$.

Alors on dit simplement que la série n'est pas uniformément convergente. Cela ne suffit pas.

Je vais expliquer que cette anomalie n'est qu'une apparence, et que toujours les deux membres sont égaux, tant que $|x|$ ne surpasse 1.

Je vais montrer en outre que l'ambiguité pour la série :

$$1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n \atop n = \infty$$

de prendre pour $x = 1$ soit la valeur 1 soit la valeur 0 n'est pas si simple et que cette série peut vraiment prendre telle valeur que l'on voudra, même $\frac{1}{2}$.

En effet. Nous avons l'identité

$$\frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x} = 1 - x + x^2 \dots + (-1)^n x^n.$$

Prenons $x = 1 - \frac{u}{n}$. La fonction u peut être une fonction très générale de n assujettie seulement à la condition :

$$\lim_{n=\infty} \frac{u}{n} = 0.$$

Nous avons :

$$\frac{1}{2 - \frac{u}{n}}\left[1 - (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n+1}\right] = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n;$$

$$x = 1 - \frac{u}{n}.$$

Or si $\frac{u}{n}$ tend vers zéro, $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n+1}$ tend vers e^{-u}.

Donc

$$\mathrm{S} = \lim\left[1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n\right] = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n e^{-u}\right].$$

$$\text{Si } n \text{ est pair on a : } \quad S_1 = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-u}\right],$$

$$\text{Si } n \text{ est impair on a : } \quad S_2 = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-u}\right].$$

Si $\lim u = \infty$, on a $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$, ce qui arrive p. ex. si $u = \sqrt{n}$ ou $u = Ln$.

Remarque géométrique. — Si l'on considère :

$$y = \frac{1}{1 + x} \; ; \; y = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n$$

comme deux fonctions distinctes, elles représentent *deux courbes qui ont un arc commun* compris entre $x = 1 + \varepsilon$ et $x = -1 + \varepsilon$, ε étant une quantité si petite que l'on veut, mais finie.

C. Popovici (Paris).

LIMITE ASSIGNÉE ET LIMITE ASSIGNABLE

Il semble que, pour certains mathématiciens, dire d'un nombre qu'il peut être supérieur ou inférieur à *toute* limite *assignée*, c'est dire équivalemment que ce nombre peut être supérieur ou inférieur à *toute* limite *assignable*.

Il y a là une équivoque que l'on peut aisément dissiper en observant tout d'abord que le nombre des nombres *assignés*, variable tant qu'on voudra mais toujours *fini*, ne peut jamais épuiser le nombre des nombres *assignables* qui est infini. D'où cette double conséquence :

1° Il existe toujours un nombre *fini* supérieur à *tout* nombre *assigné*, tandis qu'il n'existe pas de nombre *fini* supérieur à *tout* nombre *assignable*, ou, ce qui revient au même, il n'y a que l'infini qui soit supérieur à *tout* nombre *assignable*.

2° Il existe toujours un nombre *non nul* inférieur à *tout*