LIMITE ASSIGNÉE ET LIMITE ASSIGNABLE

Autor(en): **Vidal, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-7576

$$\text{Si } n \text{ est pair on a : } \quad S_1 = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-u}\right],$$

$$\text{Si } n \text{ est impair on a : } \quad S_2 = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-u}\right].$$

Si $\lim u = \infty$, on a $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$, ce qui arrive p. ex. si $u = \sqrt{n}$ ou $u = Ln$.

Remarque géométrique. — Si l'on considère :

$$y = \frac{1}{1+x} \; ; \; y = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n$$

comme deux fonctions distinctes, elles représentent *deux courbes qui ont un arc commun* compris entre $x = 1 + \varepsilon$ et $x = -1 + \varepsilon$, ε étant une quantité si petite que l'on veut, mais finie.

C. Popovici (Paris).

LIMITE ASSIGNÉE ET LIMITE ASSIGNABLE

Il semble que, pour certains mathématiciens, dire d'un nombre qu'il peut être supérieur ou inférieur à *toute* limite *assignée*, c'est dire équivalemment que ce nombre peut être supérieur ou inférieur à *toute* limite *assignable*.

Il y a là une équivoque que l'on peut aisément dissiper en observant tout d'abord que le nombre des nombres *assignés*, variable tant qu'on voudra mais toujours *fini*, ne peut jamais épuiser le nombre des nombres *assignables* qui est infini. D'où cette double conséquence :

1° Il existe toujours un nombre *fini* supérieur à *tout* nombre *assigné*, tandis qu'il n'existe pas de nombre *fini* supérieur à *tout* nombre *assignable*, ou, ce qui revient au même, il n'y a que l'infini qui soit supérieur à *tout* nombre *assignable*.

2° Il existe toujours un nombre *non nul* inférieur à *tout* nombre *assigné*, tandis qu'il n'existe pas de nombre *non nul* inférieur à *tout* nombre *assignable*, ou, ce qui revient au même, il n'y a que zéro qui soit inférieur à *tout* nombre *assignable*.

D'après cela, s'il est vrai que la possibilité, pour un nombre, d'être supérieur ou inférieur à *tout* nombre *assignable* implique nécessairement pour ce nombre la possibilité d'être supérieur ou inférieur à *tout* nombre *assigné*, il n'est pas vrai réciproquement, ou du moins pas certain *a priori*, que la seconde possibilité implique nécessairement la première.

Notons encore les conclusions suivantes trop peu soulignées peut-être dans l'enseignement courant.

Si l'on peut affirmer d'un nombre variable x qu'il ne peut être supérieur à *tout* nombre *assignable* ou, ce qui revient au même, qu'il ne peut être *infini*, on peut affirmer aussi qu'il ne peut être supérieur à un certain nombre aussi grand qu'on le voudra mais *fini;* car autrement, et puisque *tout* nombre *assignable* est *fini*, on ne pourrait pas dire que le nombre x ne peut être supérieur à *tout* nombre *assignable*.

De même, si l'on peut affirmer d'un nombre variable x qu'il ne peut être inférieur à *tout* nombre *assignable* ou, ce qui revient au même, qu'il ne peut être *nul*, on peut affirmer aussi qu'il ne peut être inférieur à un certain nombre aussi petit que l'on voudra mais *non nul;* car autrement, et puisque *tout* nombre *assignable* est *non nul*, on ne pourrait pas dire que le nombre x ne peut être inférieur à *tout* nombre *assignable*.

Voici maintenant quelques applications des observations précédentes.

Le n^e terme d'une progression géométrique croissante peut, *tout en restant fini*, devenir supérieur à *tout* nombre *assigné* mais non pas à *tout* nombre *assignable*.

Le n^e terme d'une progression géométrique décroissante peut, *sans devenir nul*, être inférieur à *tout* nombre *assigné* mais non pas à *tout* nombre *assignable*. On sait d'ailleurs que, pour $n = \infty$, et pour ce cas seulement, le n^e terme d'une progression géométrique décroissante est, non pas *à peu près*, mais *rigoureusement nul:* la formule *générale* qui donne la somme des n termes d'une progression géométrique ne peut laisser aucun doute à cet égard.

On peut très bien dire d'une branche d'hyperbole et de son asymptote qu'elles *se rencontrent à l'infini,* parce que la distance d'un point de la courbe à l'asymptote peut devenir inférieure à *tout* nombre *assignable* si la distance de ce point au sommet de la courbe devient (et c'est possible) supérieure à *tout* nombre *assignable.*

On ne peut pas dire, en géométrie classique, que deux droites parallèles *se rencontrent à l'infini.* La locution, je le sais bien, est d'un usage courant, mais cela ne signifie pas nécessairement qu'elle est exacte. On essaie, pour la justifier, de recourir à l'exemple d'une perpendiculaire OA et d'une oblique OC menées du même point O à une droite AB. Il est certain que lorsque la distance AC augmente de plus en plus l'angle AOC diffère de moins en moins d'un angle droit. Mais si l'on continue à faire tourner OC autour du point O de manière que l'angle AOC devienne droit, il ne s'ensuit pas que OC rencontre alors AB *même à l'infini.* On est même sûr du contraire, puisque OC et AB étant alors parallèles sont par le fait équidistantes, et que l'équidistance des parallèles ou n'existe pas ou se maintient *partout*, à l'infini comme ailleurs. La distance AC peut donc bien devenir, *sur la droite* AB, supérieure à *tout* nombre *assigné* mais non pas supérieure à *tout* nombre *assignable.* Donc, l'idée géométrique d'une *rencontre à l'infini,* parfaitement exacte pour une branche d'hyperbole et son asymptote, est radicalement fausse pour deux droites parallèles.

De tout ce qui précède il résulte assez clairement, ce me semble, que l'atomisme géométrique de M. Bonnel est insoutenable, puisque cette singulière théorie pose en principe qu'un nombre peut, *sans être nul,* être inférieur à *tout* nombre *assignable.*

On voit aussi avec quelle circonspection il faut introduire dans les raisonnements mathématiques les deux notions corrélatives de zéro et d'infini.

C. Vidal (Paris).