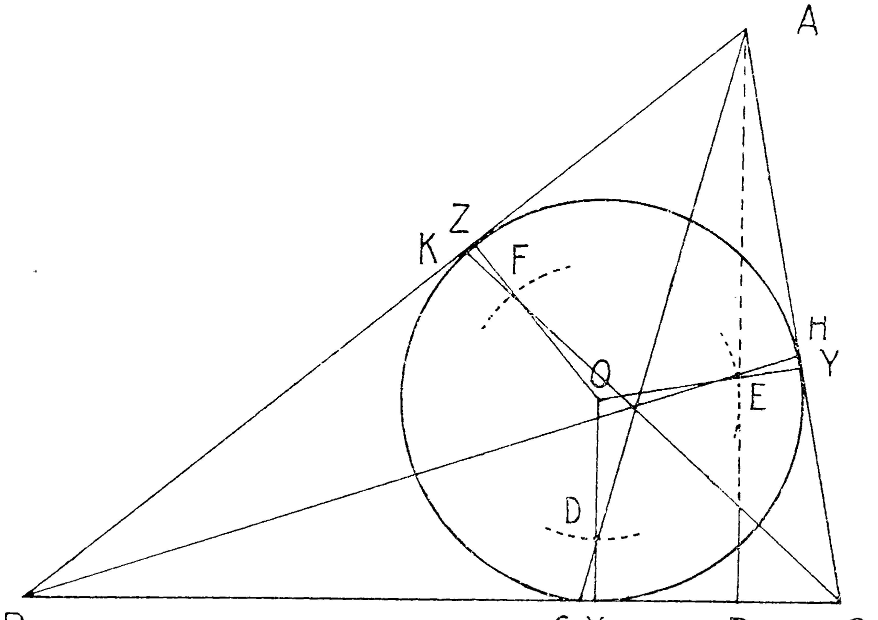
Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN THÉORÉME SUR LE TRIANGLE
Autor: Kariya, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7556

UN THÉORÈME SUR LE TRIANGLE

Voici un théorème que je crois nouveau ; il comprend comme cas particulier des théorèmes déjà connus.

Théorème. — Inscrivons un cercle O dans un triangle donné ABC ; nommons respectivement X, Y, Z les points de contact avec les trois côtés BC, CA, AB. Si l'on prend sur



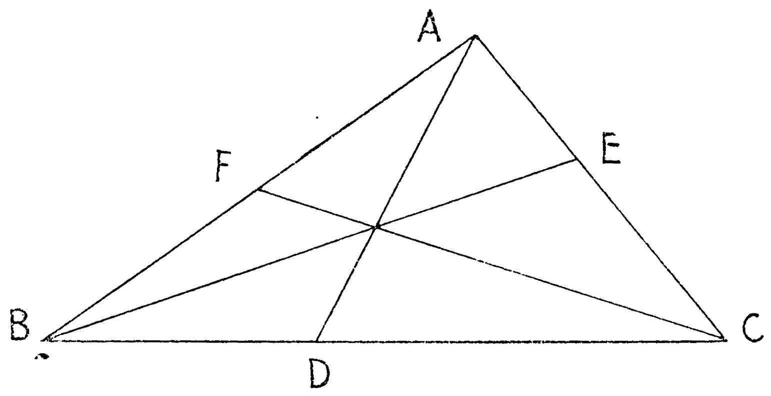
les droites OX, OY, OZ des points D, E, F également distants du point O, les trois droites AD, BE, CF concourent en un même point que je me permettrai d'appeler le « Point de Kariya. »

Démonstration. — Ni la géométrie analytique, ni la géométrie élémentaire ne me donnent d'une façon intéressante la démonstration de ce théorème. J'établis celle-ci de la manière suivante :

Si dans un triangle donné ABC, on a

BD.CE.AF = DC.EA.FB

les trois droites AD, BE, CF concourent en un même point.



Posons

$$\begin{array}{ll} BC = a & a + b + c = 2s \\ CA = b & OX = OY = OZ = r \\ AC = c & OD = OE = OF = k \end{array}$$

(k étant une longueur donnée).

On a évidemment :

$$BX = BZ = s - b,$$
$$CX = CY = s - c,$$
$$AY = AZ = s - a.$$

Si je prolonge les droites AD, BE, CF jusqu'aux points G, H, K où elles rencontrent les côtes BC, CA, AB, et si j'abaisse de chaque sommet la perpendiculaire sur le côté opposé, j'obtiens alors, en vertu des triangles semblables AGP et DGX

$$\frac{AP}{DX} = \frac{GP}{GX}, \quad \text{ou} \quad \frac{AP - DX}{DX} = \frac{GP - GX}{GX},$$

$$GX = \frac{GP - GX}{AP - DX} DX .$$

Mais

$$AP = 2\Delta ABC : a \qquad DX = r - k$$
$$GP - GX = s - c - b \cos C = b + c \cos B - s$$
$$GX = \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{a} - (r - k)} (b + c \cos B - s) .$$

On a de même

$$HY = \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{b} - (r - k)} (s - c - a \cos C)$$

$$KZ = \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{c} - (r - k)} (s - a - b \cos A) .$$

Finalement on a

$$BG = BX - GX = (s - b) - \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{a} - (r - k)} (b + c \cos B - s)$$

$$= (s - b) \frac{2\Delta}{2\Delta - a(r - k)} - \frac{ac(r - k)\cos B}{2\Delta - a(r - k)}$$

$$\left.\begin{aligned} BG = BX - GX &= \frac{2\Delta(s - b) - ac(r - k)\cos B}{2\Delta - a(r - k)}, \\ CH = CY + HY &= \frac{2\Delta(s - c) - ba(r - k)\cos C}{2\Delta - b(r - k)}, \\ AK = AZ - ZK &= \frac{2\Delta(s - a) - bc(r - k)\cos A}{2\Delta - c(r - k)}; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} GC = CX + GX &= \frac{2\Delta(s - c) - ba(r - k)\cos C}{2\Delta - a(r - k)}, \\ AH = AY - HY &= \frac{2\Delta(s - a) - bc(r - k)\cos A}{2\Delta - b(r - k)}, \\ BZ = BK - KZ &= \frac{2\Delta(s - b) - ac(r - k)\cos B}{2\Delta - c(r - k)}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

On a évidemment

$$BG.CH.AK = CG.AH.BK ;$$

c'est-à-dire que les trois droites AD, BE, CK concourent en un même point.

Corollaire 1. — Prenons $k = \infty$. Dans ce cas, les droites sont perpendiculaires aux côtés opposés et on a le théorème :

Les trois perpendiculaires abaissées de chaque sommet d'un triangle sur les côtés opposés concourent en un même point.

Corollaire 2. — Prenons $k = r$. Les trois droites AX, BY, CZ concourent en un même point.

Corollaire 3. — Prenons $k = -r$. On mesure la longueur en sens opposé.

Les deux derniers cas particuliers fournissent des théorèmes que l'on trouve ordinairement dans la géométrie moderne.

J. Kariya (Tokio).