

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN THÉORÉME SUR LE TRIANGLE
Autor: Kariya, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7556>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

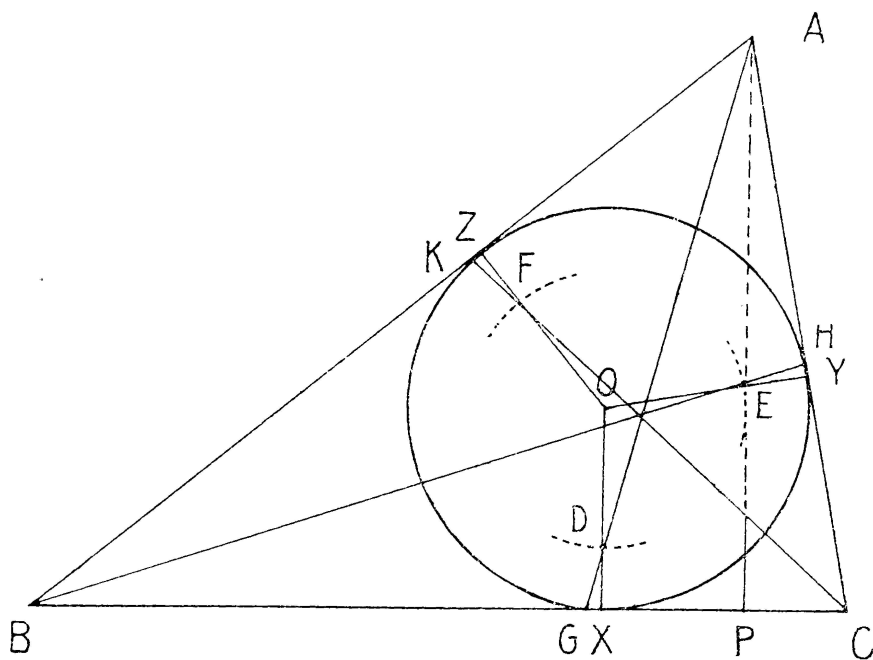
Download PDF: 18.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UN THÉORÈME SUR LE TRIANGLE

Voici un théorème que je crois nouveau ; il comprend comme cas particulier des théorèmes déjà connus.

THÉORÈME. — Inscrivons un cercle O dans un triangle donné ABC ; nommons respectivement X, Y, Z les points de contact avec les trois côtés BC, CA, AB . Si l'on prend sur



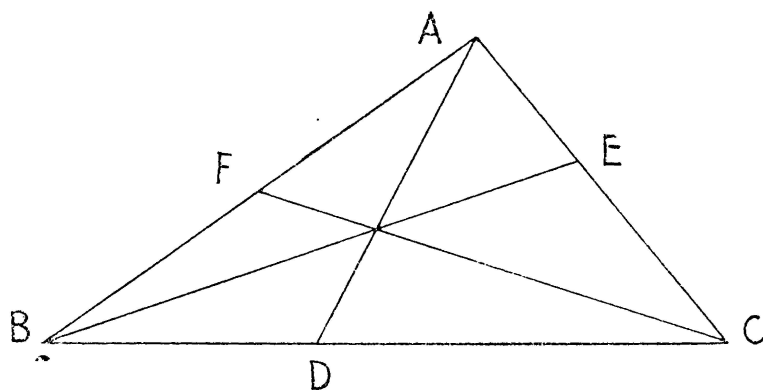
les droites OX, OY, OZ des points D, E, F également distants du point O , les trois droites AD, BE, CF concourent en un même point que je me permettrai d'appeler le « Point de Kariya. »

DÉMONSTRATION. — Ni la géométrie analytique, ni la géométrie élémentaire ne me donnent d'une façon intéressante la démonstration de ce théorème. J'établis celle-ci de la manière suivante :

Si dans un triangle
donné ABC, on a

$$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$$

les trois droites AD,
BE, CF concourent
en un même point.



Posons

$$\begin{aligned} BC &= a & a + b + c &= 2s \\ CA &= b & OX = OY = OZ &= r \\ AC &= c & OD = OE = OF &= k \\ & & (k \text{ étant une longueur donnée}). & \end{aligned}$$

On a évidemment :

$$\begin{aligned} BX &= BZ = s - b, \\ CX &= CY = s - c, \\ AY &= AZ = s - a. \end{aligned}$$

Si je prolonge les droites AD, BE, CF jusqu'aux points G, H, K où elles rencontrent les côtés BC, CA, AB, et si j'abaisse de chaque sommet la perpendiculaire sur le côté opposé, j'obtiens alors, en vertu des triangles semblables AGP et DGX

$$\frac{AP}{DX} = \frac{GP}{GX}, \quad \text{ou} \quad \frac{AP - DX}{DX} = \frac{GP - GX}{GX},$$

$$GX = \frac{GP - GX}{AP - DX} DX.$$

Mais

$$\begin{aligned} AP &= 2\Delta_{ABC} : a & DX &= r - k \\ GP - GX &= s - c - b \cos C = b + c \cos B - s \\ GX &= \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{a} - (r - k)} (b + c \cos B - s). \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned} HY &= \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{b} - (r - k)} (s - c - a \cos C) \\ KZ &= \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{c} - (r - k)} (s - a - b \cos A). \end{aligned}$$

Finalement on a

$$BG = BX - GX = (s - b) - \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{a} - (r - k)} (b + c \cos B - s)$$

$$= (s - b) \frac{2\Delta}{2\Delta - a(r - k)} - \frac{ac(r - k) \cos B}{2\Delta - a(r - k)}$$

$$\left. \begin{aligned} BG = BX - GX &= \frac{2\Delta(s - b) - ac(r - k) \cos B}{2\Delta - a(r - k)} \\ CH = CY + HY &= \frac{2\Delta(s - c) - ba(r - k) \cos C}{2\Delta - b(r - k)} \\ AK = AZ - ZK &= \frac{2\Delta(s - a) - bc(r - k) \cos A}{2\Delta - c(r - k)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} GC = CX + GX &= \frac{2\Delta(s - c) - ba(r - k) \cos C}{2\Delta - a(r - k)} \\ AH = AY - HY &= \frac{2\Delta(s - a) - bc(r - k) \cos A}{2\Delta - b(r - k)} \\ BZ = BK - KZ &= \frac{2\Delta(s - b) - ac(r - k) \cos B}{2\Delta - c(r - k)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

On a évidemment

$$BG \cdot CH \cdot AK = CG \cdot AH \cdot BK :$$

c'est-à-dire que les trois droites AD, BE, CK concourent en un même point.

COROLLAIRE 1. — Prenons $k = \infty$. Dans ce cas, les droites sont perpendiculaires aux côtés opposés et on a le théorème :

Les trois perpendiculaires abaissées de chaque sommet d'un triangle sur les côtés opposés concourent en un même point.

COROLLAIRE 2. — Prenons $k = r$. Les trois droites AX, BY, CZ concourent en un même point.

COROLLAIRE 3. — Prenons $k = -r$. On mesure la longueur en sens opposé.

Les deux derniers cas particuliers fournissent des théorèmes que l'on trouve ordinairement dans la géométrie moderne.

J. KARIYA (Tokio).