

## § III. — Application à deux exemples.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

faite au milieu de la poutre sont proportionnelles à  $\frac{Pl}{8}$ ; si le poids  $P$  est concentré au milieu les forces élastiques sont proportionnelles à  $\frac{Pl}{4}$ . Il pourrait donc arriver qu'une poutre résistant à un poids  $P$  uniformément réparti, se brisât sous cette même charge concentrée en son milieu.

Cet exemple fait valoir cette vérité que les forces de définition, par lesquelles nous remplaçons les forces réelles, ne sont pas déplaçables, et que, dans une application à la mécanique, la considération de l'équivalence des vecteurs n'a d'utilité que pour ceux qui entrent dans un système d'équations bien défini. La force unitaire sur la poutre portant un poids  $P$  uniformément réparti est  $\frac{P}{l}$ . Sur un élément de la longueur  $dx$  la charge est  $\frac{P}{l} dx$ . Le vecteur  $P$ , au milieu de la poutre, est le résultant des vecteurs  $\frac{P}{l} dx$ , mais il n'est utile de considérer cette équivalence géométrique que si l'on considère l'équilibre de toute la poutre.

### § III. — Application à deux exemples.

Ce paragraphe est destiné à montrer sur deux exemples très simples que les énoncés à réformer, parce qu'ils sont incomplets ou erronés, conduisent à des conséquences sans valeur, que l'on évite par l'emploi d'énoncés corrects.

A des variantes près, sans importance, on énonce les conditions de l'équilibre de la manière suivante: Pour qu'un système de forces, appliquées à un solide indéformable, soit en équilibre, il faut et il suffit 1° qu'en projetant ces forces sur trois axes rectangulaires passant par le même point, la somme algébrique des projections soit nulle pour chacun des axes; 2° que la somme algébrique des moments de ces forces par rapport aux trois axes soit nulle pour chacun d'eux.

Les différences essentielles entre cet énoncé et celui du § 1 p. 224 sont tellement visibles qu'il est inutile d'y insister.

Une des conséquences que l'on déduit de l'énoncé précédent est celle-ci: Pour qu'un corps solide (indéformable) qui a un point fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que

les forces qui lui sont appliquées se réduisent à une force passant par le point fixe. On suppose ici bien entendu et justement que la résistance de la matière est suffisante ; le mot indéformable d'ailleurs est là pour le sous-entendre. Cet énoncé n'est pas d'un bon enseignement, parce qu'il faut se préoccuper de la nature de la liaison qui fixe le point. Il serait mieux de dire : En négligeant le frottement et en supposant une résistance suffisante, pour qu'un solide appuyé sur un point soit en équilibre, il faut que les vecteurs substitués aux forces extérieures se réduisent à un vecteur unique *normal* à la surface de contact avec le point d'appui. Ou bien : Si un solide a un axe fixe en direction, il faut que la résultante des vecteurs rencontre l'axe normalement. Cet axe est comme celui d'un boulon dont on néglige le diamètre. Enfin, si l'axe est fixé en direction et en position sur sa direction, on dira : Il faut que la résultante rencontre cet axe. Cet axe est comme celui d'un boulon à épaulements. Ce dernier cas d'ailleurs n'est pas confondu dans l'enseignement avec les précédents ; l'indétermination est soulevée par la considération des déformations de la matière.

Soient  $F_A$ ,  $F_B$  des forces appliquées à un levier aux points A et B respectivement, R la résistance de l'appui simple O du levier. Si le levier est en équilibre les trois forces  $F_A$ ,  $F_B$ , R sont dans le plan A O B (§ III de l'article du 15 janvier) et leurs directions se rencontrent en un point D ; donc la résultante des vecteurs menés par D équipollents à  $F_A$  et  $F_B$  respectivement passe au point O. Elle doit de plus, si on néglige le frottement, être normale au levier au point O. Cette dernière condition se modifie comme l'on sait, si on considère le frottement ; elle est inutile si le point fixe est sur un boulon, dont l'axe est nécessairement perpendiculaire au plan A O B, s'il n'y a pas de frottement.

Enfin traitons la question suivante :

Deux barres articulées en A à une hauteur H au-dessus d'un plan horizontal poli, sur lequel posent leurs pieds B et C, sont maintenues dans un plan vertical où elles sont figurées par les lignes droites  $BA = l$ ,  $CA = l'$ . Elles sont réunies

par un fil horizontal à une hauteur  $h$  au-dessus du plan horizontal; la barre  $BA$  porte un poids  $P$  attaché en un point  $D$  tel que  $BD = \mu BA$ . — Déterminer la tension du fil et les réactions de l'articulation, en négligeant le poids des barres et du fil ainsi que toutes les déformations.

Il serait difficile de faire connaître toutes les fautes commises et enregistrées à propos de cet exercice; voici quelques-unes des plus répétées. Il en est qui tiennent à une compréhension insuffisante des questions de la mécanique: « il n'est pas question dans l'énoncé de réactions du plan, n'en mettons pas »; « un système matériel libre est celui qui n'est soumis qu'à son poids »; « le solide est déformable (il y a un fil), appliquons le principe de la solidification »; « le solide est indéformable, c'est-à-dire composé de pièces résistantes ». — Il en est d'autres qui paraissent résulter, avec une certaine logique, des énoncés courants: « le système n'est pas indéformable (il y a un fil), les conditions de l'équilibre n'y sont pas applicables »; « si un système est en équilibre les forces qui y sont appliquées se détruisent »; « le système est en équilibre sous l'action de la tension du fil et de la réaction en  $A$  ». Il est évident, à propos de cette dernière affirmation, que si on coupe le fil les barres tomberont; mais cette conséquence ne doit pas conduire à placer les forces intérieures et les forces extérieures dans les équations d'équilibre de l'ensemble.

*Solution.* Appliquons à l'ensemble du système les équations générales de l'équilibre rappelées au § 1. Les forces extérieures sont le poids  $P$  et les réactions  $Q_B$ ,  $Q_C$  du plan sur les pieds  $B$  et  $C$  des barres respectivement. Ces réactions sont normales au plan puisque l'on néglige le frottement. Les trois forces  $P$ ,  $Q_B$ ,  $Q_C$  sont nécessairement dans le plan  $BAC$ . Prenons pour axes l'horizontale  $BC$  et la verticale de bas en haut passant par  $B$ .

Equation des projections sur la verticale:

$$[1] \quad Q_B + Q_C - P = 0,$$

Equation des moments autour de  $B$ :

$$[2] \quad P\mu\sqrt{l^2 - H^2} - Q_C(\sqrt{l^2 - H^2} + \sqrt{l^2 - H^2}) = 0.$$

Les quatre autres équations générales sont identiquement satisfaites.

Ecrivons que la barre CA est en équilibre. Coupons le fil près de CA et remplaçons la partie supprimée à gauche par une force T représentant la tension du fil (nous verrons par son signe qu'elle est dirigée de droite à gauche). Soit R l'action de la barre BA sur la barre CA. Les forces T et R sont avec  $Q_c$  les forces extérieures qui maintiennent la barre CA en équilibre.

Equation des projections sur BC : [3]  $R_x + T = 0$ ,

» » » » la verticale : [4]  $R_y + Q_c = 0$ ,

Equation des moments autour de C : [5]  $R_x H + R_y \sqrt{l'^2 - H^2} + Th = 0$ .

Les trois autres équations sont identiquement satisfaites.

L'équation [2] donne  $Q_c = \frac{P \mu \sqrt{l'^2 - H^2}}{\sqrt{l'^2 - H^2} + \sqrt{l'^2 - H^2}}$ ,

» [3] »  $R_x = -T$ ,

» [4] »  $R_y = -Q_c$ ,

» [5] »  $-T(H - h) - Q_c \sqrt{l'^2 - H^2} = 0$ ,

ou  $T = -Q_c \frac{\sqrt{l'^2 - H^2}}{H - h}$ .

Les solutions géométriques ne sont pas en général celles que les débutants doivent chercher; mais ici les conditions d'équilibre d'un système soumis à trois seules forces fournissent une solution géométrique très simple.

L'ensemble du système est soumis aux forces extérieures  $Q_B$ ,  $Q_C$ ,  $P$ ; puisqu'il est en équilibre, le vecteur  $P$  est la résultante des vecteurs  $Q_A$  et  $Q_C$ , d'où les équations [1] et [2].

La barre CA est soumise aux trois forces  $Q_C$  et  $T$ ,  $R$  qui sont extérieures par rapport à cette barre. Les directions de ces trois forces doivent concourir en un point E, situé sur la direction du fil; de plus des vecteurs équipollents à ces forces forment un triangle. Soit F le point de rencontre de AE et de BC. Le triangle CEF est semblable au triangle des vecteurs. On a donc, en tenant compte du sens dans lequel on parcourt les côtés,

$$CF = -kT = kR_x,$$

$$CE = kQ_c = -kR_y.$$

De plus, les propriétés géométriques de la figure donnent

$$\frac{CF}{CE} = \frac{\sqrt{l^2 - H^2}}{H - h} = -\frac{T}{Q_c},$$

d'où  $T$ ,  $R_x$ ,  $R_y$ .

**Conclusion.** — Si quelque professeur désirait tirer parti dans son enseignement des réflexions contenues dans cet article et le précédent, il n'aurait évidemment à les présenter à ses élèves, ni toutes, ni dans le même ordre. Pour placer ceux-ci dans un bon courant d'idées, il pourrait, avant de commencer la mécanique, faire complètement la *théorie des vecteurs*, des centres de moyennes distances, des *centres de gravité* des figures géométriques. Ensuite il exposerait les *principes généraux* de la mécanique en traitant le mouvement et l'équilibre du *point matériel*, sans *frottement* et avec *frottement*. Puis il ferait la distinction des *forces intérieures* et des *forces extérieures* à propos de *systèmes matériels* considérés comme étant composés de points matériels, et ferait comprendre ce que c'est qu'un système à *déformation libre*. Des équations de l'équilibre du point matériel il déduirait les *conditions générales de l'équilibre* des systèmes matériels, et il insisterait sur les cas où elles sont *approximativement suffisantes*. Alors viendraient la définition d'une *pression*, celle d'un *poids*, celle d'une *force accélératrice*.

L'étude des *liaisons*, celle des *machines simples* fournissent des applications des conditions générales de l'équilibre et de la théorie des vecteurs. Dans les exercices sur la statique, il faut surtout au début employer les équations de l'équilibre, parce que l'usage de l'algèbre en général est plus commode que celui de la géométrie pour exprimer simplement et rapidement les conditions d'un problème.

Si l'on joint à cela les théorèmes généraux des quantités de mouvement et des forces vives, on aura un cadre pour un programme quelconque de mécanique élémentaire.

Al. GOULLY (Neuilly-s.-Seine.)

Ingénieur des arts et manufactures.