**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 7 (1905)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES GROUPES MÉTRIQUES
**Autor:** Combebiac, G.
**Kapitel:** II. – GROUPES MÉTRIQUES
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-8437

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 16.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

D'où :

$$S' = TT'^{-1} = TS^{-1}T^{-1} ,$$

ou enfin, comme les symboles S et $S^{-1}$ correspondent au même ensemble de transformations,

$$S' = TST^{-1} .$$

THÉORÈME 3. — *Les transformations d'un groupe qui laissent invariante une figure déterminée forment elles-mêmes un groupe.*

On a vu qu'une figure qui admet deux transformations S et S′ admet également leur produit SS′ ; d'autre part, tout groupe qui comprend S et S′ comprend aussi SS′ ; ce produit SS′ appartient donc à l'ensemble des transformations défini dans l'énoncé, c'est-à-dire que cet ensemble constitue un groupe, Q. e. d.

## II. — GROUPES MÉTRIQUES

Sophus Lie a résolu le problème suivant :

*Déterminer tous les ensembles de transformation ponctuelles jouissant des propriétés suivantes :*

M I. — *L'ensemble constitue un groupe continu comprenant les inverses de toutes ses transformations.*

M II. — *Si l'on fixe un point quelconque, le lieu des transformés d'un autre point quelconque est une surface contenant le second point et ne contenant pas le premier.*

M III. — *Il existe un volume* N *tel que, si l'on fixe un point quelconque à l'intérieur de ce volume, tout point de l'espace peut atteindre par un trajet continu tout point situé sur la surface correspondante.*

(Nous avons cru devoir adopter — à bon droit, croyons-nous, — pour l'axiome M III, un énoncé un peu différent de celui de Sophus Lie, lequel est ainsi libellé : si l'on fixe un point, il existe, *autour de ce point*, un volume tel que tout point pris à l'intérieur de ce volume peut atteindre, etc.)

L'illustre géomètre a démontré que ces propriétés suffisent à définir exactement les groupes qui servent à édifier les diverses métriques. Il doit donc être possible d'établir une

théorie de ces groupes indépendamment de tout concept d'origine métrique et notamment des concepts de droite et de plan.

Une telle théorie devrait réaliser deux objets : 1° montrer de quelle manière on peut construire un groupe de la catégorie visée en partant de données réalisables : familles de surfaces par exemple ; 2° établir les propriétés essentielles que présentent les figures par rapport à ces groupes. Nous nous bornerons à ce dernier objet : le seul but que nous nous proposons dans cette étude étant de mettre en évidence le vrai caractère mathématique des métriques, encore supprimerons-nous les démonstrations trop laborieuses et sacrifierons-nous la généralité à la simplicité en nous contentant de démonstrations largement esquissées et visant surtout les cas les plus simples. Il est donc entendu que les démonstrations doivent être suivies sur des figures ne différant pas trop des figures correspondantes de la Métrique ordinaire ; c'est ainsi que les surfaces jouant le rôle des sphères seront des sphéroïdes : toute objection sera ainsi évitée, et le discours pourra être allégé des discussions subtiles qu'exige en Mathématiques le souci de la généralité.

Définition 1. — Les groupes satisfaisant aux propriétés exprimées par les axiomes MI, MII et MIII seront appelés *métriques*.

Définition 2. — Les surfaces sur lesquelles se déplacent les divers points de l'espace lorsqu'un point est maintenu fixe seront appelées *surfaces isométriques* du groupe métrique.

Définition 3. — Un point sera dit le *centre* des surfaces isométriques qui sont décrites par les divers points de l'espace lorsque le dit point est maintenu fixe.

Nous admettrons qu'une surface isométrique est une surface fermée à simple connexion, c'est-à-dire telle que toute ligne fermée tracée sur la surface soit réductible à un point par déformation continue en restant sur la surface. Il suffit d'ailleurs de se représenter une telle surface sous la forme d'un sphéroïde.

Nous admettrons en outre le théorème suivant :

Théorème 1. — *Les surfaces isométriques ayant pour centre*

*un point appartenant au volume (région de l'espace)* N *entourent ce point.*

Des propriétés des groupes démontrées dans le § précédent résulte le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Une surface isométrique est le lieu des transformés de chacun de ses points lorsque son centre est maintenu fixe.*

D'après le théorème I 3, les transformations d'un groupe métrique qui laissent un point fixe forment un groupe (*sous-groupe* du groupe métrique). Une surface isométrique ayant pour centre ce point est, par définition, le lieu des transformés de l'un de ses points ; la proposition à démontrer résulte donc du théorème I 1, d'après lequel le lieu des transformés d'un point est le même que le lieu des transformés de l'un de ses transformés.

De ce théorème et de l'axiome M III résulte évidemment la proposition suivante :

THÉORÈME 3. — *Les surfaces isométriques ayant pour centre commun un point de la région* N *n'ont pas de point commun.*

Les transformations d'un groupe métrique G qui laissent fixe un point $P_1$ forment elles-mêmes, d'après le théorème I 3, un groupe (*sous-groupe* du groupe G) ; ce groupe laisse invariante, d'après le théorème 2, chacune des surfaces isométriques de centre $P_1$ et par suite détermine, pour les divers points d'une telle surface $\Sigma$, un groupe de transformations $g$. L'établissement des propriétés de ce groupe $g$, qui doit précéder l'étude du groupe G, n'est pas sans présenter des difficultés : il s'agit en somme de transcrire en raisonnement géométrique les investigations analytiques de Sophus Lie. Nous nous bornerons à exposer la suite des propositions en mettant en évidence le mécanisme des déductions dans la mesure où ce sera possible sans une trop grande complication.

Nous prendrons le point maintenu fixe $P_1$ dans la région N, de sorte que la surface $\Sigma$ entoure ce point.

Il résulte de l'axiome M III combiné avec le théorème 2 que, dans ce cas, le groupe $g$ non seulement est transitif, mais encore permet de transformer un point quelconque de la surface $\Sigma$ en tout autre point de cette surface. Or on démontre que

tout groupe dans lequel la fixation d'un point de la surface $\Sigma$ suffit à fixer tous les points de cette surface jouit de la propriété de laisser invariants (fixes) deux points (réels) et une ligne réelle ; les groupes rentrant dans cette catégorie doivent donc être écartés.

Un point $P_2$ de cette surface étant maintenu fixe, un autre point $P_3$ de la surface doit rester sur la surface isométrique passant par $P_3$ et ayant pour centre $P_2$ ; cette dernière surface ne se confond pas avec $\Sigma$, car elle passerait alors par son propre centre, ce qui serait contraire à l'axiome M II. Les deux surfaces fermées se rencontrent donc suivant une ou plusieurs lignes fermées dont l'une au moins passant par $P_3$, à moins qu'elles ne soient tangentes entre elles (le contact de deux surfaces est un concept totalement indépendant de l'idée métrique).

Nous admettrons que deux surfaces isométriques qui ont déjà un point commun se rencontrent suivant une seule ligne fermée sans point double, ligne qui se réduit à un point dans le cas du contact.

Le point $P_2$ étant maintenu fixe, ainsi que le point $P_1$, le point $P_3$ doit donc rester sur la ligne fermée C, courbe d'intersection des deux surfaces isométriques passant par $P_3$ et ayant pour centres respectifs $P_1$ et $P_2$ ; les surfaces isométriques de centre $P_2$ déterminent ainsi sur $\Sigma$ une famille de courbes dont deux se réduisent à des points et correspondent à celle de ces surfaces qui se réduit au point $P_2$ lui-même et à celle de qui est tangente à $\Sigma$. En désignant par $P'_2$ le point de contact ainsi défini, on voit que chacune des lignes ainsi déterminée sépare les points $P_2$ et $P'_2$.

La famille des lignes relatives à $P_2$ jouit de propriétés qui ne lui permettent pas de jouer le même rôle par rapport à un autre point de $\Sigma$, à l'exception de $P'_2$. Il en résulte que, si l'on fixe un autre point $P_3$ de $\Sigma$, la position d'un point quelconque de cette surface doit se trouver à la fois sur deux lignes différentes et par suite est déterminée.

Le groupe $g$ possède, d'après cela, les propriétés suivantes :

*Tout point de la surface $\Sigma$ peut être transformé en un autre point; si l'on fixe un point $P_2$ de $\Sigma$, un autre point $P'_2$ se*

*trouve également fixé et tout point de la surface décrit une courbe fermée séparant les points* $P_2$ *et* $P'_2$ *; enfin la fixation d'un nouveau point empêche toute transformation.*

THÉORÈME 4. — *Si deux points distincts sont maintenus fixes, il en est de même de tous les points d'une ligne continue, ouverte et sans points doubles passant par ces deux points.*

A et B désignant deux points distincts, à chaque surface isométrique de centre A l'on peut faire correspondre deux surfaces isométriques de centre B tangentes à la première. (On peut, par exemple, les déterminer comme limites de suites convergentes de surfaces.) On obtient ainsi, sur chaque surface isométrique de centre A, deux points qui restent fixes en même temps que A et B.

D'après les hypothèses faites sur les surfaces isométriques, les points de contact ainsi obtenus constituent une ligne sans points doubles, centinue et ouverte (c'est-à-dire s'étendant à l'infini dans les deux sens). Cette ligne passe d'ailleurs évidemment par les points A et B.

DÉFINITION 4. — Les lignes définies par le théorème précédent seront appelées *lignes axiales* du groupe.

THÉORÈME 5. — *Lorsqu'une surface admet toutes les transformations d'un groupe métrique* G *qui laissent fixe un point ainsi que toutes celles qui laissent fixe un autre point, cette surface admet toutes les transformations du groupe* G.

D'après le théorème I 3, les transformations du groupe G qui sont admises par une surface déterminée forment un groupe G′ (sous-groupe du groupe G). Supposons qu'un tel groupe comprenne toutes les transformations T qui laissent fixe un point M ainsi que toutes les transformations T′ qui laissent fixe un second point M′ ; il devra comprendre les produits de ces diverses transformations et, en particulier, toutes les transformations de la forme :

$$TT'T^{-1}.$$

Cette expression représente, d'après le théorème II 3, l'ensemble des transformations laissant invariant le point :

$$T(M'),$$

c'est-à-dire un point quelconque de la surface isométrique passant par M′ et ayant pour centre M.

On poursuivrait la démonstration en prouvant par le même procédé que le Groupe G′ comprend toutes les transformations de G qui laissent invariant tout point appartenant à une surface isométrique de centre M′ et, par suite, tout point de l'espace. Ce groupe ne peut être que le groupe G lui-même.

Ce théorème peut évidemment s'énoncer sous la forme suivante :

THÉORÈME 5 *bis*. — *Une surface isométrique d'un groupe métrique ne peut admettre pour centre deux points distincts sans admettre également tous les points de l'espace.*

Nous admettrons le théorème suivant :

THÉORÈME 6. — *La condition nécessaire et suffisante pour que trois surfaces isométriques ayant un point commun soient telles que l'une passe par l'intersection des deux autres est que leurs centres soient situés sur une même ligne axiale.*

THÉORÈME 7. — *Une ligne axiale est le lieu des points laissés fixes par toutes les transformations du groupe* G *qui laissent fixes deux quelconques de ses points.*

Ce théorème peut se décomposer en deux parties :

1° Deux points quelconques d'une ligne axiale l'admettent comme ligne axiale. Il suffit évidemment de démontrer que tout point P d'une ligne axiale déterminée par deux points $P_1$ et $P_2$ détermine la même ligne axiale conjointement avec $P_1$ par exemple. Les surfaces isométriques passant par $P_2$ et ayant pour centres respectifs $P_1$ et P doivent se couper, d'après le théorème précédent, suivant la même ligne que les deux surfaces isométriques ayant pour centres respectifs $P_1$ et $P_2$ et passant également par $P_2$. Cette intersection se réduit, comme la dernière surface elle-même, à un point : il en résulte que les deux premières surfaces sont tangentes en $P_2$, c'est-à-dire que $P_2$ appartient à la ligne axiale déterminée par $P_1$ et P et par suite reste fixe en même temps que ces deux points.

2° Aucun point extérieur à une ligne axiale n'est maintenu fixe par toutes les transformations qui laissent fixes deux points de cette ligne. Si M désigne un point quelconque ex-

térieur à une ligne axiale, une surface isométrique passant par M et ayant son centre P sur cette ligne rencontre celle-ci en deux points, $M_1$ et $M_2$, et on a vu que, parmi les transformations du groupe G laissant fixe $P_1$, il en existe par lesquelles les points $M_1$ et $M_2$ sont maintenus fixes tandis que le point M décrit une ligne fermée. L'existence de ces transformations établit la proposition.

Des propriétés déjà établies résulte évidemment le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — *Les lignes axiales d'un groupe métrique forment un ensemble de lignes jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Une ligne axiale est déterminée par un couple de points ;*

2° *Elle passe par ces deux points ;*

3° *Tout couple de points appartenant à une ligne axiale l'admet comme ligne axiale.*

THÉORÈME 9. — *Le lieu des centres des surfaces isométriques passant par deux points donnés est une surface.*

A et B désignent deux points appartenant à la région N, considérons une ligne quelconque L joignant ces deux points et considérons toutes les surfaces isométriques passant par A et ayant pour centres les divers points de la ligne L. Celle de ces surfaces qui a pour centre A se réduit à un point, celle qui a pour centre B entoure ce point. Comme on passe de l'une à l'autre de ces surfaces par une suite continue, il existe nécessairement, dans la suite ainsi définie, une surface qui passe par B.

Il existe donc sur toute ligne joignant les points A et B un point du lieu. Il est visible, dans ces conditions, que ce lieu est une surface.

DÉFINITION 5. — Les surfaces définies par le théorème précédent seront appelées *surfaces axiales* du groupe métrique.

THÉORÈME 10. — *Une ligne axiale qui a deux de ses points sur une surface axiale y est située toute entière.*

Deux points A et B d'une surface axiale sont, d'après la définition d'une telle surface, les centres de deux surfaces isométriques passant à la fois par deux points C et D de l'espace. Il en résulte, d'après le théorème G, que tout point de la ligne axiale déterminée par les deux points A et B, est le

centre d'une surface isométrique passant à la fois par les points C et D et par suite appartient à la surface axiale considérée.

THÉORÈME 11. — *Par trois points donnés passe toujours une surface axiale.*

En effet, les trois surfaces isométriques ayant respectivement pour centres les trois points donnés A, B et C, et passant par un point arbitrairement choisi M ont en commun ce dernier point plus (au moins) un autre N. La surface axiale déterminée comme lieu des centres des surfaces isométriques passant par les points M et N contient évidemment les trois points A, B et C.

THÉORÈME 12. — *La surface décrite par une ligne axiale qui s'appuie sur une ligne axiale donnée en passant par un point fixe extérieur à cette ligne est une surface axiale.*

En effet il existe, d'après le théorème précédent, une surface axiale passant par le point fixe donné et par deux points pris sur la ligne axiale donnée. Cette surface comprend, d'après le théorème 10, tous les points de la surface définie dans l'énoncé et par suite coïncide avec cette dernière.

THÉORÈME 13. — *Par trois points dont l'un n'est pas situé sur la ligne axiale déterminée par les deux autres il ne passe qu'une surface axiale.*

Il n'existe qu'une seule surface axiale passant par trois points A, B et C lorsque l'un des points, C par exemple, est extérieur à la ligne axiale passant par les deux autres. En effet, les diverses lignes axiales passant par le point C et par les divers points de la ligne axiale AB forment évidemment une surface si C est extérieur à cette ligne ; tout point de cette surface, d'après le théorème 10, doit appartenir à toute surface axiale passant par les trois points A, B et C, celle-ci doit donc se confondre avec la surface ainsi décrite, qui est évidemment unique.

Les théorèmes 11 et 13 peuvent être réunis sous la forme suivante :

THÉORÈME 13 *bis*. — *Une surface axiale est déterminée par la condition de passer par trois points non situés sur la même ligne axiale.*

Deux autres théorèmes sont évidents, savoir :

THÉORÈME 14. — *Lorsque trois surfaces axiales ont deux points communs, tout point commun à deux d'entre elles appartient à la troisième.*

En effet, la ligne axiale déterminée par les deux points communs aux trois surfaces appartient à chacune d'elles d'après le théorème 10 ; elles ne peuvent d'ailleurs pas avoir d'autre point commun, d'après le théorème 13, sans se confondre.

THÉORÈME 15. — *Deux surfaces axiales qui ont un point commun en ont toujours un second.*

THÉORÈME 16. — *L'intersection de deux surfaces axiales est constituée par une ligne axiale.*

En effet, si deux surfaces axiales ont un point commun, elles en ont au moins un autre d'après le théorème précédent ; elles contiennent par suite toutes les deux, d'après le théorème 10, la ligne axiale déterminée par ces deux points. Enfin, d'après le théorème 13, elles ne peuvent pas avoir un autre point commun sans se confondre.

THÉORÈME 17. — *Les lignes axiales qui s'appuient sur deux lignes axiales concourantes sont situées sur une même surface.*

En effet si D et D′ désignent deux lignes axiales concourantes en un point O, la surface formée par les lignes axiales passant par les divers points de D′ et par un point M de D est, d'après le théorème 12, une surface axiale. Comme elle comprend d'ailleurs deux points O et M de D, elle comprend aussi, d'après le théorème 10, tout point N de cette ligne, et par suite, d'après le même théorème, elle comprendra toute ligne axiale passant par N et par un point quelconque de D′. Comme le point N est quelconque sur la ligne D′, la surface axiale ainsi définie comprend bien toutes les lignes axiales qui s'appuient sur les lignes D et D′.

THÉORÈME 18. — *Toute surface transformée par un groupe métrique d'une surface isométrique de ce groupe est une surface isométrique ayant pour centre le transformé du centre de la première.*

Il résulte du théorème II 2 que, si T désigne l'expression générale des transformations d'un groupe admises par une

figure F, toutes les transformations du groupe admises par une transformée F′ de F sont comprises dans l'expression générale :

$$STS^{-1},$$

S étant une des transformations du groupe qui transforment F en F′. Or une surface isométrique F d'un groupe métrique G admet, d'après le théorème 2, les mêmes transformations de G que son propre centre : il résulte donc de l'expression précédente que la transformée F′ de F par une transformation S de G admet les mêmes transformations de G que le transformé par S du centre de F, ce qui équivaut à l'énoncé du théorème.

THÉORÈME 19. — *La région* N *relative à un groupe métrique est le lieu des points transformés de l'un d'eux par les transformations du groupe.*

Il résulte de la démonstration du théorème 9 que, sur toute ligne joignant deux points A et B de la région N, il existe un point qui est le centre d'une surface isométrique passant à la fois par A et B. On peut d'ailleurs tracer cette ligne de manière qu'elle reste tout entière dans la région N. Dans ces conditions, il résulte de l'axiome M III que chacun des points A et B se trouve parmi les transformés de l'autre par le groupe G.

Il reste à démontrer que, si A est un point appartenant à la région N, il en est de même de tout transformé B de A :

$$B = S(A)$$

par une transformation S du groupe, autrement dit que la propriété attribuée par l'axiome M III aux points de la région N est invariante par rapport au groupe. Or ce fait résulte manifestement du théorème précédent combiné avec les propriétés exprimées par le théorème II 2 : en effet deux points appartenant à une même surface isométrique de centre B sont les transformés par S de deux points appartenant à une surface isométrique de centre A ; ces deux derniers points sont susceptibles d'être transformés l'un dans l'autre puisque A appartient à la région N ; et la transformation qui permet

d'obtenir ce résultat devient évidemment, par l'application de S une transformation ayant la même propriété par rapport aux deux points situés sur la surface isométrique de centre B. Ce dernier point appartient donc à la région N.

THÉORÈME 20. — *Si* A, B *et* A′ *désignent trois points appartenant à la région* N *relative à un groupe métrique, il existe sur toute ligne axiale passant par* A′, *d'un côté donné de ce point, un point et un seul* B′ *tel que le couple de points* (A, B) *soit congruent au couple* A′, B′) *par rapport au groupe.*

On peut en effet, d'après le théorème 19, amener le point A en coïncidence avec le point A′ ; le transformé du point B pourra alors, d'après l'axiome M III, atteindre tous les points d'une surface isométrique ayant pour centre A′. Or il résulte de la construction même des lignes axiales telle qu'elle est exposée dans la démonstration du théorème 4, qu'une telle ligne rencontre une surface isométrique ayant pour centre un de ses points en deux points situés de part et d'autre de ce centre, ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME 21. — *Les transformées par un groupe métrique* G *d'une de ses lignes axiales sont également des lignes axiales du groupe.*

En effet la construction par laquelle on détermine une de ces lignes est invariante par rapport au groupe G, puisque toute transformée par ce groupe d'une de ses surface isométriques est une surface isométrique ayant pour centre le transformé du centre de la première et qu'en outre le contact de deux surfaces constitue une propriété invariante par rapport à toutes les transformations ponctuelles (c'est-à-dire que les transformées de deux surfaces tangentes entre elles sont également tangentes).

THÉORÈME 22. — *Un couple de points* (A, B) *est toujours congruent par rapport à un groupe métrique au couple* (B, A).

En effet, il résulte de la construction des surfaces axiales exposée dans la démonstration du théorème 9 qu'il existe sur la ligne axiale AB entre les points A et B, un point O qui est le centre d'une surface isométrique passant à la fois par les points A et B. Par suite, le point O appartenant d'ailleurs à la région N, il est possible, tout en maintenant fixe ce

point, de donner comme transformé à B le point A. La transformée de la ligne axiale AB ou OB est alors, d'après le théorème précédent, la ligne axiale OA, qui se confond, d'après le théorème 8, avec la ligne axiale AB. Le transformé du point A devant se trouver à la fois sur cette ligne axiale et sur la surface isométrique passant par A et ayant pour centre O doit coïncider avec le point B, de sorte que le transformé du couple (A, B) est bien le couple (B, A).

THÉORÈME 23. — *Tout couple* (D, D′) *de lignes axiales concourantes d'un groupe métrique* G *est congruent par rapport à ce groupe au couple* (D′ D).

La démonstration de ce théorème peut être calquée sur celle du théorème précédent en observant qu'il résulte des théorèmes 10 et 21, combinés avec les propriétés du groupe $g$ relatif à une surface isométrique que, lorsqu'on maintient fixes un point et une ligne axiale passant par ce point, une autre ligne axiale passant également par ce point décrit une surface qui rencontre suivant deux lignes axiales la surface axiale déterminée par les deux premières lignes.

THÉORÈME 24. — *Si* $h_1$ *et* $h_2$ *désignent deux demi-lignes axiales d'un groupe métrique* G *issues d'un même point* O *et si* $h'_1$ *désigne une demi-ligne axiale issue d'un point* $O'_1$, *il existe, sur toute surface axiale passant par la ligne axiale complète correspondante à* $h'_1$ *et d'un côté donné de cette ligne,* UNE *demi-ligne axiale* $h'_2$ *et* UNE SEULE *telle que la figure* $(h_1, h_2)$ *soit congruente à la figure* $(h'_1, h'_2)$ *par rapport au groupe* G.

(Les points de concours O et O′ sont supposés appartenir à la région N relative au groupe G.)

On peut amener O en coïncidence avec O′ d'après le théorème 19 pris un point de $h_1$ en coïncidence avec le point de $h'_1$ qui se trouve sur la même surface isométrique de centre O ; d'après le théorème 21, $h_1$ coïncidera alors avec $h'$, et, en se servant de la propriété invoquée pour la démonstration du théorème précédent, on voit que la demi-ligne axiale $h_2$ peut occuper, sur une surface axiale passant par $h'$, deux et seulement deux positions, dont l'une est située d'un côté et l'autre de l'autre de la ligne axiale complète sur laquelle est prise $h_1$.

Les propriétés qui viennent d'être exposées sont communes à tous les groupes de transformations ponctuelles qui ont été réunis sous le qualificatif de *métriques :* mais certains de ces groupes peuvent présenter des particularités qui jouent un rôle important dans la question des Principes de la Métrique. L'une de ces particularités concerne la région N, l'autre la famille des lignes axiales.

La région N relative a un groupe métrique peut s'étendre à tout l'espace. Dans ce cas, l'énoncé de l'axiome M III se simplifie, car il suffit alors d'attribuer à tous les points de l'espace les propriétés réservées par cet axiome aux points d'une région déterminée. Il résulte alors du théorème 19 qu'un point quelconque de l'espace se trouve parmi les transformés d'un autre point quelconque. Nous poserons la définition suivante :

Définition 6. — Un groupe métrique sera dit *archimédien* lorsque tout point de l'espace se trouve parmi les transformés par le groupe d'un point quelconque et qu'en outre une transformation quelconque du groupe, appliquée à un point quelconque de l'espace, aura pour résultat un point déterminé (réel).

Les groupes ainsi définis peuvent être aussi caractérisés en disant que la surface qui limite la région N est *rejetée à l'infini*.

La seconde condition qui figure dans la définition des groupes archimédiens a pour but d'en éliminer certains : il peut se faire en effet que la région N comprenne tous les points de l'espace, mais qu'à chaque transformation du groupe corresponde une région limitée comprenant tous les points qui ont, par cette transformation, des transformés déterminés (réels), les points situés sur la surface qui limite ladite région ayant alors des transformés, pour ainsi dire, rejetés à l'infini et les points extérieurs à la région n'ayant pas de transformés (réels). Dans ce cas, au point de vue analytique, le groupe laisse encore une surface invariante, mais cette surface est *imaginaire* (cas des groupes riemanniens, par exemple).

La seconde particularité affecte la famille des lignes axiales.

Considérons une ligne continue, ouverte et sans point

double D, un point O extérieur à la ligne D, ainsi que d'autres lignes D′ continues, ouvertes et sans points doubles, passant par le point O et constituant un ensemble tel que l'une d'entre elles soit déterminée par l'un de ses points distincts du point O. Si l'on considère une surface à simple connexion, continue et ouverte passant par O et par D et, sur cette surface, une ligne fermée entourant le point O, les divers point de cette ligne fermée déterminent avec O des lignes D′, parmi lesquelles certaines rencontrent D et d'autres ne la rencontrent pas.

Les deux lignes D′ qui constituent la limite commune aux régions de la surface ainsi définie, sont *asymptotiques* à D, l'une étant asymptotique à l'une des deux branches infinies de D′ et l'autre à l'autre de ces branches.

Si l'on admet qu'une ligne D′ ne peut pas avoir plus d'un point commun avec D, aucune de ces deux lignes asymptotiques ne peut rencontrer D, de sorte que deux cas seulement sont possibles : ou bien il existe deux lignes asymptotiques comprenant entre elles une infinité de lignes D′ n'ayant pas de point commun (réel) avec D, ou bien ces deux lignes se confondent et constituent la seule ligne D′ ne rencontrant pas D en un point déterminé (réel).

Ces considérations sont directement applicables à tout l'ensemble de lignes déterminées par deux quelconques de leurs points et, en particulier, à l'ensemble des lignes axiales d'un groupe métrique. Nous poserons donc la définition suivante :

Définition 7. — Lorsqu'un ensemble de lignes dont chacune est déterminée par deux quelconques de ses points est telle que par un point extérieur à l'une de ces lignes on ne puisse lui mener qu'une ligne asymptotique appartenant à l'ensemble, on dira que cette famille jouit de la propriété de l'*unicité de l'asymptotique*.

Il est inutile de pousser plus loin l'étude des groupes métriques. On verra en effet dans un prochain article que les théorèmes déjà démontrés constituent une base plus que suffisante pour édifier la métrique au moyen de raisonnements purement logiques.

Nous ne nous dissimulons pas d'ailleurs les nombreuses

défectuosités de cette étude et surtout ses lacunes. Il convient en effet, en établissant les propriétés de nouveaux concepts, d'en démontrer en même temps l'existence et même de les déterminer, c'est-à-dire, en Géométrie, de les *construire*. Tout groupe métrique peut être obtenu comme transformé, par une transformation convenablement choisie, d'un groupe métrique déterminé, par exemple du groupe des déplacements sans déformation. Mais on admet ainsi l'existence d'un groupe métrique.

Quant à nous, si nous attachons quelque valeur à cette ébauche malgré ses trop manifestes imperfections, c'est qu'elle nous semble propre à jalonner une voie, dont l'intérêt a été signalé par Sophus Lie lui-même (en des termes qui témoignent d'ailleurs d'une défiance injustifiée pour l'efficacité géométrique de ses propres axiomes).

**Conclusions.** — Quelle que soit la base adoptée pour la Métrique, une conclusion s'impose :

1° La Métrique ne constitue qu'un chapitre de la Géométrie, science de l'espace ;

2° Les propriétés dont elle traite ne sont caractéristiques d'aucun concept spécial, et elles ne mettent en œuvre que l'idée de figure, qui réunit en elle les concepts géométriques généraux, savoir ceux de point, ligne, surface, continuité, infini, à l'exclusion de tout concept métrique, tel que le déplacement sans déformation, la droite, le plan, etc.;

3° A plus forte raison, la Métrique (et, par suite, le postulat des parallèles) ne peut-elle rien nous apprendre sur la nature ou les propriétés de « l'espace » et, d'ailleurs, le concept de figure invariable perd tout intérêt proprement géométrique pour ne conserver qu'un intérêt *physique*.

Qu'il nous soit permis, en terminant, d'émettre, brièvement et sous toutes réserves, quelques réflexions inspirées par ces résultats.

Ne semble-t-il pas que la Géométrie, ainsi affranchie de la suggestion métrique, prend un aspect nouveau ? En voyant s'abolir l'importance traditionnelle de l'idée de figure invariable, l'on n'aperçoit plus aucun motif de maintenir la Science tout entière sous sa dépendance, ainsi que le réa-

lise actuellement le principe de *Relativité géométrique.* Après l'émancipation de la Géométrie, on est donc conduit à poursuivre celle de la Mécanique et de la Physique.

Les objections se présentent évidemment en foule, mais sont-elles insurmontables ?

La lumière se propage en ligne droite *dans les milieux homogènes ;* mais un milieu homogène n'est-il pas, par définition, celui dont les propriétés en chaque point de l'espace ne changent pas dans un déplacement sans déformation ? La rectilinéarité du rayon lumineux est donc peut-être simplement *voulue* par notre esprit.

Un point matériel *soustrait à toute influence mécanique extérieure* se meut en ligne droite avec une vitesse constante ; mais a-t-on jamais déterminé la part d'arbitraire, d'anthropomorphisme, de suggestion métrique, que comporte l'expression écrite en italiques ?

Les équations de Lagrange relatives à un système matériel quelconque permettent de déterminer, à un instant quelconque, les dérivées secondes des variables par rapport au temps en fonction de ces variables et de leurs dérivées premières et les seuls concepts proprement mécaniques qui figurent dans ces équations sont la force vive et le travail virtuel ; a-t-on une raison de nier *à priori* la possibilité d'une généralisation de ces concepts qui en exclurait toute empreinte métrique ?

Signalons enfin qu'une telle transformation des Principes de la Physique et de la Mécanique, qui aurait peut-être pour effet de leur attribuer un caractère de nécessité logique, paraît s'accorder avec les idées émises par M. Poincaré [1] dans un de ces aperçus dont l'illustre géomètre a le secret et où l'on ne sait ce que l'on doit le plus admirer de la profondeur de la pensée ou de la limpidité de l'expression.

G. Combebiac (Limoges).

[1] H. Poincaré, *L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique,* Revue des Idées, 15 novembre 1904 (reproduit dans *La Valeur de la Science,* 2e partie : Les Sciences physiques).