# SUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Autor(en): **Nielsen, Niels**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-8438

# SUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

I. — Supposons $n$ positif entier, puis posons

$$\cos(n\varphi) = a_{n,0}(\cos\varphi)^n + a_{n,2}(\cos\varphi)^{n-2} + a_{n,4}(\cos\varphi)^{n-4} + \ldots \tag{1}$$

Heine[1] a déterminé les coefficients $a_{n,2p}$ en applicant, pour

$$x = \cos\varphi \pm i\sin\varphi ,$$

la série de puissances ordinaire qui représente $\log(1 + x)$. Les mêmes coefficients et les coefficients de quelques développements analogues sont déterminés par Yvon de Villarceau[2] qui a appliqué les propriétés différentielles des fonctions trigonométriques et sa méthode a été modifiée par Catalan[3].

En étudiant pour le moment les fonctions sphériques généralisées, j'ai trouvé une détermination tout à fait élémentaire de tous les coefficients susdits, et cela en m'appuyant seulement sur la formule binomiale à exposant positif entier et sur la série géométrique ordinaire.

A cet effet, nous avons à partir de l'identité

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q} ; \tag{2}$$

posons d'abord

$$q = x(\cos\varphi + i\sin\varphi) ,$$

puis

$$q = x(\cos\varphi - i\sin\varphi) ,$$

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. II, p. 187, 1870.
[2] *Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 1469-1471, 1876.
[3] *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 529-536, 1883.

nous aurons, en additionnant puis soustrayant les formules ainsi obtenues, ces deux autres

$$(3)\quad \frac{1-x\cos\varphi}{1-2x\cos\varphi+x^2}=1+x\cos\varphi+x^2\cos 2\varphi+\ldots+x^n\cos(n\varphi)+x^{n+1}Q$$

$$(4)\quad \frac{x\sin\varphi}{1-2x\cos\varphi+x^2}=\quad x\sin\varphi+x^2\sin 2\varphi+\ldots+x^n\sin(n\varphi)+x^{n+1}Q_1.$$

où $Q$ et $Q_1$ désignent des quantités qui resteront finies pour $x=0$.

Cela posé, mettons encore dans (2)

$$q=2x\cos\varphi-x^2,$$

nous aurons de même

$$(5)\quad \frac{1}{1-2x\cos\varphi+x^2}=1+x(2\cos\varphi-x)+x^2(2\cos\varphi-x)^2+\ldots+ \\ x^n(2\cos\varphi-x)^n+x^{n+1}Q_2,$$

où $Q_2$ est fini pour $x=0$.

Ordonnons maintenant suivant les puissances positives entières de $x$ les premiers termes du second membre de (5), nous aurons à chercher le coefficient de $x^r$ obtenu du terme

$$x^{r-p}(2\cos\varphi-x)^{r-p}\quad,\qquad 2p\leqq r\ ,$$

pour lequel la formule binomiale donnera immédiatement cette expression :

$$(-1)^p\binom{r-p}{p}(2\cos\varphi)^{r-2p}\quad,$$

de sorte que nous obtenons, en vertu de (5), une nouvelle identité de cette forme

$$(6)\qquad \frac{1}{1-2x\cos\varphi+x^2}=1+A_1(\cos\varphi)\,x+A_2(\cos\varphi)\,x^2+\ldots+ \\ A_n(\cos\varphi)\,x^n+x^{n+1}Q_3\ ;$$

où $Q_3$ restera fini pour $x=0$, tandis que nous avons posé pour abréger

$$(7)\quad A_r(\cos\varphi)=(2\cos\varphi)^r-\binom{r-1}{1}(2\cos\varphi)^{r-2}+\binom{r-2}{2}(2\cos\varphi)^{r-4}-\ldots$$

Multiplions maintenant par $x \sin \varphi$ les deux membres de (6), il résulte, en vertu de 4), une identité de cette forme

$$(8) \quad x^2 \sin 2\varphi + x^3 \sin 3\varphi + \ldots + x^n \sin(n\varphi) = x^2 A_1(\cos\varphi) \sin\varphi + x^3 A_2(\cos\varphi) \sin\varphi + \ldots + x^n A_{n-1}(\cos\varphi) \sin\varphi + x^{n+1} Q_4 \, .$$

où $Q_4$ restera fini pour $x = 0$. Divisons ensuite par $x^2$ les deux membres de (8), puis mettons $x = 0$, il résultera

$$\sin 2\varphi = A_1(\cos\varphi) \sin\varphi \, ,$$

d'où en divisant par $x^3$ l'identité nouvelle obtenue de (8) en supprimant le premier terme de ses deux membres, l'hypothèse $x = 0$ donnera de nouveau

$$\sin 3\varphi = A_2(\cos\varphi) \sin\varphi \, ,$$

et ainsi de suite. Nous aurons généralement

$$(9) \quad \sin(n\varphi) = A_{n-1}(\cos\varphi) \, . \, \sin\varphi \, .$$

Cela posé, multiplions par $1 - x\cos\varphi$ les deux membres de (6), puis comparons avec (3) la formule ainsi obtenue, nous aurons, en suivant le même procédé, l'autre formule générale analogue à (9) :

$$(10) \quad \cos(n\varphi) = A_n(\cos\varphi) - A_{n-1}(\cos\varphi) \, . \, \cos\varphi \, .$$

Or, la formule (10) nous permet de déterminer les coefficients $a_{n.2s}$ figurant au second membre de (1) ; nous aurons en effet, pour $r > 0$,

$$a_{n.2r} = (-1)^r \binom{n-r}{r} 2^{n-2r} - (-1)^r \binom{n-r-1}{r-1} . \, 2^{n-2r-1} \, ,$$

d'où, après une simple réduction

$$(11) \quad a_{n.2r} = (-1)^r \, \frac{2n-r}{r} \, . \binom{n-r-1}{r-1} \, . \, 2^{n-2r-1} \, .$$

tandis que nous trouverons particulièrement, pour $r = 0$,

$$(11 \text{ bis}) \quad a_{n.0} = 2^{n-1}$$

Pour déduire d'autres formules fondamentales, mettons dans (9) (10) $\frac{\pi}{2} - \varphi$ au lieu de $\varphi$, nous aurons pour $n$ pair, en mettant $2n$ au lieu de $n$ :

$$\text{(12)} \qquad \sin(2n\varphi) = (-1)^n \left[ A_{2n-1}(\sin\varphi) \,.\, \cos\varphi \right] \,.$$

$$\text{(13)} \qquad \cos(2n\varphi) = (-1)^n \left[ A_{2n}(\sin\varphi) - A_{2n-1}(\sin\varphi)\sin\varphi \right] \,,$$

et pour $n$ impair, en mettant $2n+1$ au lieu de $n$ :

$$\text{(12 bis)} \qquad \sin(2n+1)\varphi = (-1)^n \left[ A_{2n+1}(\sin\varphi) - A_{2n}(\sin\varphi)\sin\varphi \right]$$

$$\text{(13 bis)} \qquad \cos(2n+1)\varphi = (-1)^n \ A_{2n}(\sin\varphi)\cos\varphi \,.$$

Cela posé, remarquons ensuite que le produit

$$P_n = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \,..\, \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

s'évanouira pour $x = \frac{p\pi}{n}$, où $p$ désigne un nombre entier quelconque, puis appliquons l'identité

$$\sin\left(x + \frac{p\pi}{n}\right) \sin\left(x + \frac{(n-p)\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{p\pi}{n} + x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{n} - x\right) \,,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin\left(x + \frac{p\pi}{n}\right) \sin\left(x + \frac{(n-p)\pi}{n}\right) = \sin^2\frac{p\pi}{n} - \sin^2 x \,,$$

il est évident que $P_n$ est un polynome entier de $\sin x$, abstraction faite du facteur $\cos x$ dans le cas, où $n$ est pair ; c'est-à-dire que $P_n$ est une expression complètement de la même nature que le second membre de (12) et (12 bis) si nous y remplaçons $\varphi$ par $x$ ; de plus $P_n$ s'évanouira pour les mêmes valeurs de $\sin x$ que $\sin(nx)$, d'où il résulte une identité de cette forme

$$\text{(14)} \quad \sin x = \alpha_n \,.\, \sin\frac{x}{n} \,.\, \sin\frac{x+\pi}{n} \,.\, \sin\frac{x+2\pi}{n} \ldots \sin\frac{x+(n-1)\pi}{n} \,,$$

où $\alpha_n$ désigne un facteur indépendant de $x$.

Pour déterminer maintenant la valeur de $\alpha_n$ divisons d'abord par $x$ les deux membres de (14), puis posons $x = 0$, nous aurons

$$(15) \qquad n = \alpha_n \, . \sin\frac{\pi}{n} \, . \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

tandis que l'hypothèse $x = \frac{\pi}{2}$ donnera de même

$$(16) \qquad 1 = \alpha_n \, . \sin\frac{\pi}{2n} \, . \sin\frac{3\pi}{2n} \, . \, . \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} \, .$$

d'où en multipliant (15) (16)

$$2n = 2\alpha_n^2 . \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} \, ,$$

ce qui donnera, en vertu de (15),

$$(17) \qquad \alpha_{2n} = 2\alpha_n^2 \, .$$

Cela posé, mettons dans (15),

$$\sin\frac{2p\pi}{n} = 2\cos\frac{p\pi}{2n} \sin\frac{p\pi}{2n} = 2\sin\frac{p\pi}{2n} \sin\frac{(n+p)\pi}{2n} \, ,$$

nous aurons de même

$$n = \alpha_n \, . \, 2^{n-1} \, . \, \frac{2n}{\alpha_{2n}} \, ,$$

ou bien,

$$\alpha_{2n} = 2^n . \alpha_n \, ,$$

d'où, en vertu de (17),

$$\alpha_n = 2^{n-1} \, ;$$

car la valeur $\alpha_n = 0$ est impossible ici ; nous avons ainsi démontré cette autre formule générale

$$(18) \quad \sin x = 2^{n-1} \sin\frac{x}{n} \sin\frac{x+\pi}{n} \sin\frac{x+2\pi}{n} \ldots \sin\frac{x+(n-1)\pi}{n} \, ,$$

tandis que les formules (15) (16) donnent ces résultats numériques

$$(19) \qquad \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{3\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$(19 \text{ bis}) \qquad \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}} \, .$$

II. — Pour donner une application des dernières formules que nous venons de développer, cherchons le discriminant $\Delta_n$ de cette équation algébrique

$$a_{n,0}\,x^n + a_{n,2}\,x^{n-2} + a_{n,4}\,x^{n-4} + \ldots = \omega \,, \tag{20}$$

où $\omega$ est une quantité donnée, tandis que les coefficients $a_{n,2p}$ sont les mêmes qui figurent dans (1).

A cet effet, désignons par $\alpha$ un des angles qui satisfont à l'égalité

$$\cos\alpha = \omega \,,$$

de sorte que $\alpha$ deviendra imaginaire, quand $\omega$ n'est pas égal à une quantité réelle, telle que $-1 \leqq \omega \leqq +1$ ; mais, en tous cas, toutes les racines de (20) deviendront

$$\cos\frac{\alpha}{n}\,,\ \cos\frac{\alpha+2\pi}{n}\,,\ \ldots\,,\ \cos\frac{\alpha+(2n-2)\pi}{n}\,.$$

Cela posé, nous trouverons $\pm\sqrt{\Delta_n}$ égale au produit de tous les facteurs de la forme

$$\cos\frac{\alpha+2p\pi}{n} - \cos\frac{\alpha+2q\pi}{n} = 2\sin\frac{(q-p)\pi}{n}\,.\,\sin\frac{\alpha+(p+q)\pi}{n}\,, \tag{21}$$

où $q > p$, et où $0 \leqq p \leqq n-2$, $1 \leqq q \leqq n-1$. Or, le nombre de facteurs possibles de la forme (21) étant $\frac{n(n-1)}{2}$, nous aurons évidemment

$$\Delta_n = 2^{n(n-1)}\,.\,P_1^2\,.\,P_2^2\,, \tag{22}$$

où $P_1$ et $P_2$ désignent les produits de tous les facteurs possibles de ces formes

$$\sin\frac{(q-p)\pi}{n} \quad \text{respectivement} \quad \sin\ldots\frac{x+(q+p)\pi}{n}\,;$$

c'est-à-dire que nous aurons d'abord

$$P_1 = \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{n-2}\ldots\left(\sin\frac{(n-1\;\pi}{n}\right)^1\,,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$P_1 = \left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)^{n-1}\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\right)^{n-2}\dots\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^1 ;$$

car nous avons toujours

$$\sin\frac{(n-p)\pi}{n} = \sin\frac{p\pi}{n} .$$

Multiplions ensuite les deux expressions ainsi obtenues pour $P_1$, il résultera, en vertu de (19),

$$P_1^2 = \left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^n . \tag{23}$$

La détermination du produit $P_2$ est un peu plus difficile, parce qu'il faut considérer séparément les deux cas, où $n$ est pair ou impair.

1° *n impair*, savoir $n = 2r + 1$ ; je dis que la somme $p + q$ peut avoir une des deux valeurs $s$ ou $s + 2r + 1 \leqq 4r - 1$, où

$$s = 1, 2, 3, \dots, 2r ,$$

précisément pour $r$ combinaisons des valeurs possibles de $p$ et $q$ ; on aura en effet pour $s$ pair

$$p + q = S \text{ pour } \begin{cases} q = s,\ s-1,\ s-2, \dots, \frac{s}{2}+1 \\ p = 0,\ 1,\ 2, \qquad \dots, \frac{s}{2}-1 \end{cases}$$

et de même, pour $s \leqq 2r - 2$,

$$p + q = s + 2r + 1 \text{ pour } \begin{cases} q = 2r,\ 2r-1,\ 2r-2, \dots, r+\frac{s}{2}+1 \\ p = s+1,\ s+2,\ s+3, \dots, r+\frac{s}{2} , \end{cases}$$

tandis que le cas; où $s$ est impair donnera de même

$$p + q = s \text{ pour } \begin{cases} q = s,\ s-1,\ s-2, \dots, \frac{s+1}{2} \\ p = 0,\ 1,\ 2, \qquad \dots, \frac{s-1}{2} \end{cases}$$

et, pour $s \leqq 2r - 3$

$$p + q = S + 2r + 1 \text{ pour } \begin{cases} p = 2r,\ 2r - 1,\ \ldots,\ r + \dfrac{s+1}{2} + 1 \\ q = s + 1,\ s + 2,\ \ldots,\ r + \dfrac{s-1}{2}, \end{cases}$$

et voilà la démonstration de notre énoncé.

Cela posé, nous aurons évidemment

$$P_2 = \pm \left(\sin \frac{\alpha}{n} \sin \frac{\alpha + \pi}{n} \ldots \sin \frac{\alpha + (n-1)\pi}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

d'où, en vertu de (18),

$$P_2^2 = \left(\frac{\sin \alpha}{2^{n-1}}\right)^{n-1};$$

or, la définition de $\alpha$ donnera

$$\sin^2 \alpha = 1 - \omega^2,$$

d'où finalement, en vertu de (22) et (23), pour $n$ *impair*

$$\Delta_n = \frac{n^n (1 - \omega^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{(n-1)^2}}. \tag{24}$$

2° $n$ *pair*, soit $n = 2r$; je dis que la somme $p + q$ peut avoir une des deux valeurs $s$ ou $s + 2r \leqq 4r - 3$, où

$$s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2r - 1,$$

pour $r$ respectivement $r - 1$ combinaisons de valeurs possibles de $p$ et $q$, selon que $s$ est supposé impair ou pair. On aura en effet pour $p + q = s$ les mêmes solutions que dans 1°, mais pour $p + q = s + 2r$, où $s \leqq 2r - 3$, les solutions suivantes, savoir pour $s$ pair

$$q = 2r - 1,\ 2r - 2,\ \ldots,\ r + \frac{s}{2} + 1$$

$$p = s + 1,\ s + 2,\ \ldots,\ r + \frac{s}{2} - 1$$

et pour $s$ impair

$$q = 2r - 1,\ 2r - 2,\ \ldots,\ r + \frac{s+1}{2}$$

$$p = s + 1,\ s + 2,\ \ldots,\ r + \frac{s-1}{2},$$

ce qui donnera $r$ respectivement $r-1$ systèmes possibles, d'où

$$P_2^2 = \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+\pi}{n}\cdots\sin\frac{\alpha+(n-1)\pi}{n}\right)^n}{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+2\pi}{n}\cdots\sin\frac{\alpha+(n-2)\pi}{n}\right)^2}$$

ou bien, en vertu de (18),

$$P_2^2 = \frac{(\sin\alpha)^n}{2^{(n-1)^2}\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{(n-1)^2}(1-\omega)},$$

de sorte que nous obtenons pour *n pair*

$$\Delta_n = \frac{n^n(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}-1}(1+\omega)}{2^{(n-1)^2}}.$$

NIELS NIELSEN (Copenhague).

---

## SUR L'APPROXIMATION DES RACINES D'ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

1. Les approximations successives.

Etant donnée l'équation

$$x = F(x) \tag{1}$$

dont on connaît une solution approchée $x_0$, formons les quantités $x_\nu$ suivant la formule

$$x_{\nu+1} = F(x_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

$x_n$ sera une valeur approchée de la racine $x$, si la différence $x_{n+1} - x_n$ est négligeable. Car on a

$$x_n - F(x_n) = x_n - x_{n+1}.$$