SUR L'APPROXIMATION DES RACINES D'ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

Autor(en): **Lerch, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-8439

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ce qui donnera r respectivement $r - 1$ systèmes possibles, d'où

$$P_2^2 = \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+\pi}{n}\cdots\sin\frac{\alpha+(n-1)\pi}{n}\right)^n}{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+2\pi}{n}\cdots\sin\frac{\alpha+(n-2)\pi}{n}\right)^2}$$

ou bien, en vertu de (18),

$$P_2^2 = \frac{(\sin\alpha)^n}{2^{(n-1)^2}\,.\,2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{(n-1)^2}(1-\omega)},$$

de sorte que nous obtenons pour *n pair*

$$\Delta_n = \frac{n^n(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}-1}(1+\omega)}{2^{(n-1)^2}}.$$

NIELS NIELSEN (Copenhague).

SUR L'APPROXIMATION DES RACINES D'ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

1. Les approximations successives.

Etant donnée l'équation

$$x = F(x) \tag{1}$$

dont on connaît une solution approchée x_0, formons les quantités x_ν suivant la formule

$$x_{\nu+1} = F(x_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

x_n sera une valeur approchée de la racine x, si la différence $x_{n+1} - x_n$ est négligeable. Car on a

$$x_n - F(x_n) = x_n - x_{n+1}.$$

Pour juger l'approximation obtenue par la méthode, changeons ν en $\nu+1$, dans l'équation (2), et retranchons avec l'équation (2) :

$$x_{\nu+2} - x_{\nu+1} = F(x_{\nu+1}) - F(x_\nu) .$$

Le théorème de la moyenne ou de Rolle permet de conclure

$$(3) \qquad x_{\nu+2} - x_{\nu+1} = (x_{\nu+1} - x_\nu) F'(\xi_\nu) ,$$

où ξ_ν fait partie de l'intervalle $(x_\nu \ldots x_{\nu+1})$. Il s'ensuit

$$(4) \qquad x_{n+1} - x_n = (x_1 - x_0) F'(\xi_0) F'(\xi_1) \ldots F'(\xi_{n-1}) .$$

Pour que la méthode soit applicable, il faut que la fonction $F'(\xi)$ soit petite aux environs de la racine cherchée.

Dans l'équation de Kepler

$$x = a + \varepsilon \sin x$$

on a

$$F'(x) = \varepsilon \cos x \; ;$$

la méthode des approximations successives fournira de bons résultats, si $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{10}$, ou si $|\varepsilon|$ étant toujours $\leqq 1$, la racine x est approchée de $\pm \frac{\pi}{2}$, ce qui exige que a soit approché de $\pm\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$.

2. La solution de l'équation

$$f(x) = 0$$

dont on connaît une valeur approchée x_0 se ramène au cas précédent en faisant

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} .$$

Faisant $x = x_0 + h$, l'expression de la dérivée se développe en série

$$F'(x_0 + h) = -\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} h - \frac{f'''(x_0)}{2!\, f'(x_0)} h^2 - \ldots$$

d'où il suit qu'on ait sensiblement

$$F'(\xi) = \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)}(x_0 - \xi).$$

Cette quantité sera petite, si la racine dont il s'agit, est simple.

Remarquons que, pour déterminer des racines multiples, on ne fait pas usage de l'algorithme du plus grand commun diviseur, impossible pour des équations transcendantes, et très rarement praticables pour des équations algébriques.

S'il s'agit d'une racine de multiplicité p, on résout l'équation

$$f^{(p-1)}(x) = 0$$

dont la racine en question est une solution simple.

3. La méthode de Newton successive.

Elle consiste dans la formation des quantités

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

et n'est autre que la méthode du numéro 1, pourvu que l'on fasse

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On a ici

$$F'(x) = \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2}$$

et il s'ensuit d'après (4).

$$x_{n+1} - x_n = (x_1 - x_0)\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{f''(\xi_\nu)f(\xi_\nu)}{f'(\xi_\nu)^2}.$$

Cette méthode est plus rapide que celle du numéro précédent, car ici le numérateur contient des facteurs $f(\xi_\nu)$ qui tendent vers zéro, tandis que les quantités $F'(\xi_\nu)$ du numéro 2 sont presque constantes ; mais cette dernière présente cet avantage que le dénominateur $f'(x_0)$ dans les formules

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_0)}$$

est constant.

4. Une méthode pour résoudre l'équation

$$f(x) = 0$$

consiste à effectuer l'inversion d'une série de puissances. Posant en effet

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + \eta \ , \tag{5}$$

le problème prend la forme

$$a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots = \eta \ , \tag{5 bis}$$

et on a, d'après un algorithme connu,

$$\xi = b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 + \dots \ ; \tag{6}$$

il ne reste qu'à prendre $\eta = -f(x_0)$ pour avoir

$$f(x_0 + \xi) = 0 \ .$$

5. Le développement (6), borné à ses deux premiers termes, devient

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_0) f(x_0)^2}{f'(x_0)^3} ,$$

x_1 étant la nouvelle valeur approchée de la racine $x = x_0 + \xi$. Cette formule nous amène à prendre, pour employer la méthode du numéro 1,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x) f(x)^2}{f'(x)^3} \ , \ x_{\nu+1} = F(x_\nu) \ .$$

On a ici

$$F'(x) = \frac{3f''(x)^2 - f'(x) f'''(x)}{2f'(x)^4} f(x)^2$$

et il est manifeste que la convergence est beaucoup plus rapide que dans la méthode de Newton ; mais elle est aussi plus pénible, puisque elle emploie des valeurs de la dérivée seconde.

6. On aura une généralisation de la *regula falsi*, si l'on effectue l'inversion de l'équation

$$f(x) = y$$

au moyen de la formule d'interpolation

$$x = x_0 + B_1(y - y_0) + B_2(y - y_0)(y - y_1) + B_3(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2) + \ldots$$

où l'on a posé

$$y_\nu = f(x_\nu),$$

en prenant pour les x_ν des quantités arbitraires aux environs de la racine cherchée x' ; en faisant $y = 0$, il vient

$$(7) \qquad x' = x_0 - B_1 y_0 + B_2 y_0 y_1 - B_3 y_0 y_1 y_2 + \ldots$$

Quant aux quantités B_ν, on les calcule au moyen des équations

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0 + B_1(y_1 - y_0) \\ x_2 = x_0 + B_1(y_2 - y_0) + B_2(y_2 - y_0)(y_2 - y_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Pour avoir une approximation commode, on choisit x_0, x_1 et calcule y_0, y_1 ; cela permet d'évaluer B_1 ; puis on fait, pour se tenir à la méthode (7),

$$x_2 = x_0 - B_1 y_0,$$

et on détermine $y_2 = f(x_2)$; la deuxième équation (8) donne alors aisément la valeur de B_2. Ensuite, on fait

$$x_3 = x_0 - B_1 y_0 + B_2 y_0 y_1 = x_2 + B_2 y_0 y_1, \quad y_3 = f(x_3),$$

et on tire du système (8) la valeur de B_3, et ainsi de suite.

M. Lerch (Fribourg, Suisse).