

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN LIVRE DE M. COUTURAT
Autor: Laurent, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-8440>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A PROPOS D'UN LIVRE¹ DE M. COUTURAT

La lecture de l'opuscule de M. Couturat paru dans le recueil *Scientia*, sur l'Algèbre de la Logique, m'a vivement intéressé et m'a suggéré l'idée de présenter les choses traitées par l'éminent philosophe sous un aspect un peu différent; contrairement à ce qu'il avance, je crois que l'algèbre de la logique fait partie de l'algèbre ordinaire et repose sur ses principes. Je vais essayer de m'expliquer.

Je me permets de rappeler.

1° Que deux choses identiques, sont deux choses qui ne diffèrent en rien l'une de l'autre, elles ne forment qu'une seule et même chose, car si elles ne formaient pas une seule et même chose, elles différeraient l'une de l'autre par quelque propriété.

2° Que deux choses égales sont deux choses qui deviennent identiques quand on fait abstraction d'un certain nombre de leurs propriétés. Un cheval et un lapin sont égaux quand faisant abstraction de toutes leurs autres propriétés, on les considère comme des animaux, c'est ainsi qu'un cheval et un lapin font deux animaux.

3° L'addition est l'opération commutative, ainsi la multiplication est une forme de l'addition, les objets nuls sont ceux qui peuvent être ajoutés sans modifier le résultat de l'addition. 1 est l'objet nul dans la multiplication des nombres considérés comme addition.

4° les quantités de même espèce sont les choses à propos desquelles on a défini l'égalité et l'addition.

5° Un nombre est une locution (et un signe qui la repré-

¹ *L'Algèbre de la Logique*, Collection *Scientia*, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

sente) qui sert à désigner avec précision une quantité, et celles qui lui sont égales, de manière à les distinguer des autres.

6° Pour désigner ainsi, ou comme l'on dit, pour mesurer une quantité, on en choisit une parmi celles de même espèce que l'on appelle unité, et l'on donne des noms à celles qui résultent de l'addition successive d'unités, ces noms sont les nombres entiers.

Il peut arriver que l'unité soit divisible en parties égales (locution à définir) alors on est conduit à la considération des nombres fractionnaires et même incommensurables, mais le contraire peut avoir lieu.

Après avoir fait cela, il peut arriver, et il arrive presque toujours, que l'on a défini toutes les quantités considérées de manière à les distinguer de celles qui leur sont inégales, mais il peut en être autrement. (On sait, par exemple, qu'après avoir défini l'égalité et l'addition des vecteurs on peut choisir parmi eux une unité, faire le travail indiqué précédemment, mais on ne définit ainsi qu'une partie des vecteurs de l'espace, à savoir ceux de même orientation que l'unité choisie).

Dans ce cas, on prend une seconde unité non comprise parmi les quantités déjà mesurées, cette seconde unité définit une nouvelle série de quantités, en appelant i la première unité, j la seconde, on peut représenter une quantité de la première série mesurée par le nombre a par ai , de même une quantité de la seconde série sera représentée par bj . Il peut arriver que $ai + bj$ soit un symbole capable de représenter toutes les quantités considérées, (c'est ce qui arrive pour les vecteurs d'un plan); le contraire peut avoir lieu, on prend alors une troisième unité, etc. Les nombres de la forme $ai + bj + ck + \dots$ sont alors des nombres complexes (ou imaginaires) i, j, \dots sont des *clefs*.

Enfin, il peut arriver que les unités étant indivisibles, les nombres complexes $ai + bj + \dots$ sont des entiers complexes, a, b, \dots désignant des entiers ordinaires.

Il peut arriver que les unités toutes, ou seulement une partie d'entre elles soient indivisibles. Les coefficients de cer-

taines clefs peuvent être nécessairement entiers. Par exemple ajouter des hommes et des chevaux, ce sera si l'on veut les amener sur un champ de bataille; on considérera les hommes comme égaux entre eux, les chevaux comme égaux entre eux mais non égaux aux chevaux, et on pourra baser un calcul sur des nombres complexes $ah + bc$, où h sera un homme, c un cheval.

Il peut arriver que non seulement les unités soient indivisibles, mais qu'elles soient en nombre limité, ce cas va nous intéresser tout particulièrement. Alors i désignant une clef, on aura nécessairement n désignant un entier $ni = i$ ou ri, \dots et (mais peu importe pour notre objet) on aura $ni = i$, ce qui n'est contradictoire avec nos habitudes, qu'en apparence, la théorie des congruences présente des formules analogues à celle-ci.

Enfin il peut arriver que dans chaque série, il n'entre qu'une quantité qui sera à la fois unité et de nul effet, on aura en appelant i une clef $i + i = i$ puisqu'il n'y a qu'un objet dans la série relative à la clef i . Toutefois l'existence de pareilles quantités complexes est à démontrer. (Quoique l'on puisse, au point de vue logique spéculer sur de telles quantités en admettant leur existence, et par le fait on a longtemps spéculé sur l'imaginaire $\sqrt{-1}$ avant d'en avoir démontré l'existence, on a spéculé sur les systèmes linéaires de Laguerre avant d'avoir remarqué que ces imaginaires étaient des substitutions très réelles).

J'arrive à l'interprétation concrète de nos quantités complexes. *Ce sont les diverses propositions que l'on peut énoncer.*

Ce sont des quantités, car on peut définir leur égalité et leur addition comme il suit :

1° *Deux propositions sont égales, quand elles expriment le même fait, vrai ou faux, dans les mêmes termes ou dans des termes équivalents.*

2° La somme de plusieurs propositions consiste dans leur affirmation alternative : Je m'explique ; si i, j, k sont des propositions, $i + j + k$ voudra dire que l'une des propositions i, j, k est vraie.

On a défini produit de plusieurs propositions $i, j, k,$

leur affirmation simultanée, ainsi ijk est la proposition en vertu de laquelle i, j, k , sont vraies à la fois.

Il est clair que l'on aurait pu appeler somme ce que nous avons appelé produit et vice-versa, et cela eut peut-être été plus simple.

Il est bien évident alors que $i + i = i$, si i est une proposition quelconque, car si i est vrai, ou i , ou i sera vrai, on voit que $i + j$ n'est pas égal à i ou à j , de même $i.i = i$. Dans le calcul de nos quantités complexes, il n'y aura donc ni facteurs *numériques*, ni exposants.

La différence $d = i - j$ de deux propositions est telle que ajoutée à j elle donne i . Ainsi $d + j = i$, donc si d ou j sont vraies, i est vraie.

Dans les théories ordinaires, la soustraction ne peut se faire que d'une manière, je rappelle la démonstration : si l'on pouvait avoir

$$\delta + j = i \quad \text{et} \quad \delta' + j = i$$

on en conclurait

$$\delta + j = \delta' + j$$

et en posant $\delta' = \delta + \varepsilon$, si δ' était plus grand que δ on aurait

$$\delta + j = \delta + j + \varepsilon$$

et ε serait un objet nul, et comme on *convient* de ne pas écrire les objets nuls, on a $\delta = \delta'$. Mais ici nous *convenons* au contraire d'écrire et de tenir compte des objets nuls, la soustraction, et aussi la division pourront se faire de plusieurs manières, donc dans la théorie des idées, il n'y a en résumé ni soustraction, ni division, ni multiplication par un *nombre* ordinaire, ni exposants, ni radicaux. Il y a là une simplicité apparente, au moins réelle dans les formules, et peut-être une complication dans les idées.

On a trouvé commode de prendre une clef égale à i , comme dans le calcul des imaginaires de la forme $a + bi$, et une autre égale à zéro.

i est l'expression de tout ce qui est vrai, o est le faux ou

l'absurde. Je préférerais la convention inverse, et en effet si l'on désigne par a' la négation de a on a

$$aa' = 0 \quad \text{et} \quad a + a' = 1,$$

on préférerait avoir

$$aa' = 1 \quad , \quad a + a' = 0,$$

cela choquerait moins les habitudes.

Je n'ai pas à examiner ici les conséquences du nouveau calcul, j'ai simplement voulu prouver que en partant de la définition nette et précise de la quantité, non seulement on peut, comme je l'ai fait voir dans mon opuscule sur les principes de la théorie des nombres et de la géométrie (*Scientia*) 1° établir sur des principes solides la mathématique pure et appliquée; 2° faire rentrer dans la mathématique pure, ou dans la théorie des nombres complexes, ce que l'on a appelé l'algèbre de la logique.

H. LAURENT (Paris).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sous ce titre nous publions les remarques et renseignements concernant plus ou moins directement l'enseignement mathématique, telles que des descriptions d'instruments ou d'appareils nouveaux, etc. Quant à la correspondance, elle permet à tout lecteur de présenter sous une forme rapide les idées qui lui semblent utiles, les remarques suggérées par la lecture d'un article, ou les questions sur lesquelles il aurait besoin d'un renseignement.

LA RÉDACTION.

Sur l'enseignement de la Géométrie.

(Extrait d'une lettre à M. Laisant.)

L'intéressant article de M^r Gino Loria (voir pp. 11 à 20) *sur l'enseignement des mathématiques élémentaires en Italie* m'a rappelé qu'à l'Ecole d'application de l'Artillerie et du Génie, où j'ai suivi un cours de Fortification permanente, la première leçon de ce cours m'a beaucoup troublé. Il m'a été impossible de comprendre le profes-