Sur la détermination des axes d'une hyperbole.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

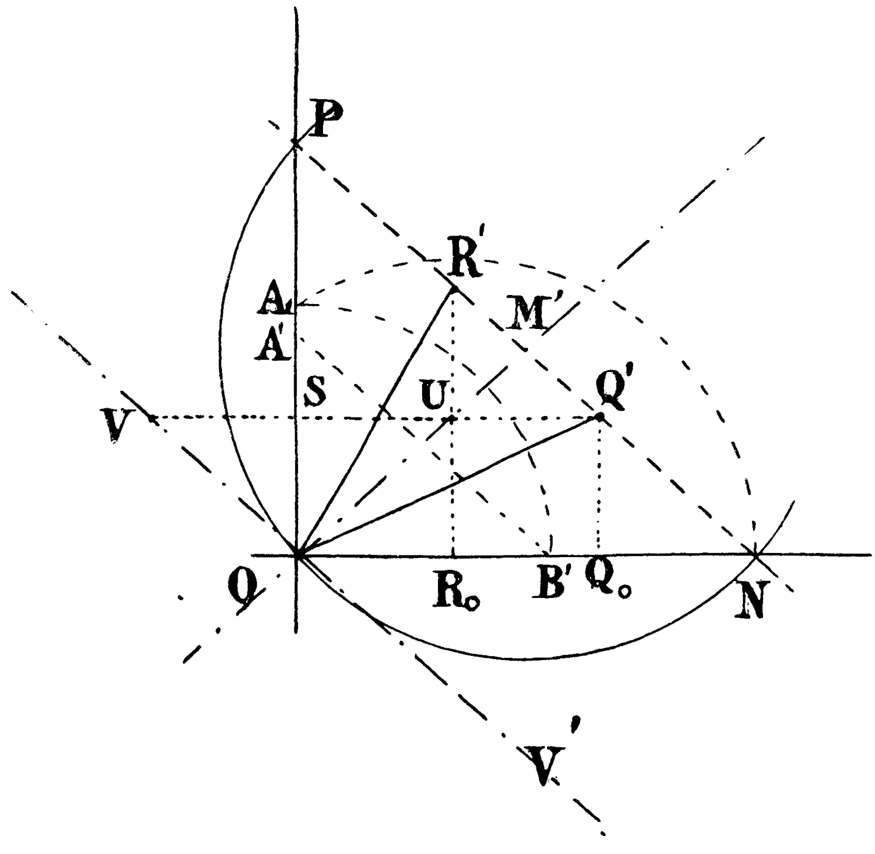
Sur la détermination des axes d'une hyperbole.

(A propos d'un article de M. Majcen).

La construction indiquée par M. Majcen (*l'Ens. Math.* p. 221-225) pour la détermination des axes d'une hyperbole dont deux diamètres conjugués sont donnés, peut se légitimer aisément sans recourir aux propriétés des projections d'une hyperbole équilatère.

Nous nous servirons des mêmes notations et nous reproduirons la fig. 2 pour y ajouter quelques lignes auxiliaires. Il est évident que les asymptotes de la courbe sont l'un la droite OM′ et l'autre la droite VV′ menée par O parallèlement à PN. Puisque les triangles POM′ et M′ON sont isoscèles, on aura

$$\widehat{M'ON} = \widehat{ONM'} = \widehat{NOV'} ,$$
$$\widehat{POM'} = \widehat{M'PO} = \widehat{POV} ,$$



et les droites OP, ON, étant les bissectrices des angles formés par les asymptotes, seront les directions des axes.

Si Q_0 est le pied de la perpendiculaire abaissée de Q' sur ON on aura

$$OQ_0 = R_0N \,, \qquad OR_0 = Q_0N \,,$$

et, d'après la figure,

$$\overline{OB'}^2 = \overline{OA_1}^2 = \overline{R_0N}^2 - \overline{OR_0}^2 = \overline{R_0N}^2 - \overline{Q_0N}^2 .$$

Alors on peut observer :

a) Des relations

$$\frac{\overline{OA'}^2}{\overline{OB'}^2} = \frac{\overline{R_0R'}^2}{\overline{R_0N}^2} = \frac{\overline{Q_0Q'}^2}{\overline{Q_0N}^2} = \frac{\overline{R_0R'}^2 - \overline{Q_0Q'}^2}{\overline{R_0N}^2 - \overline{Q_0N}^2}$$

on déduit

$$\overline{OA'}^2 = \overline{R_0R'}^2 - \overline{Q_0Q'}^2 ,$$

et comme

$$\overline{OR'}^2 = \overline{OR_0}^2 + \overline{R'R_0}^2 = \overline{Q_0N}^2 + \overline{R'R_0}^2 ,$$

$$\overline{OQ'}^2 = \overline{OQ_0}^2 + \overline{Q'Q_0}^2 = \overline{R_0N}^2 + \overline{Q_0Q'}^2 ,$$

il vient

$$\overline{OB'}^2 - \overline{OA'}^2 = \overline{OQ'}^2 - \overline{OR'}^2 ,$$

et l'on peut conclure que OB′ et OA′ sont effectivement les demi-axes de l'hyperbole, car la droite A′B′ est parallèle à l'un des asymptotes et la différence de leurs carrés est égale à la différence des carrés des demi-diamètres donnés.

b) Si Q' est un point réel de l'hyperbole et si U, V et S sont les points où la droite menée par Q' parallèlement à ON coupe les asymptotes et OP, on sait que OB′ est le demi-axe si

$$\overline{OB'}^2 = Q'U \,.\, Q'V \,.$$

Mais US = SV, et par suite

$$Q'U \,.\, Q'V = \overline{Q'S}^2 - \overline{SU}^2 ,$$

et puisque la droite $R'R_0$ passe par U, on a

$$Q'U \,.\, Q'V = \overline{R_0N}^2 - \overline{OR_0}^2 ,$$

ce qui justifie la construction.

c) On peut aussi appliquer la propriété que l'aire du triangle formé en joignant les extrémités de deux diamètres conjugués est constante. Si OB' est le demi-axe on a

$$\frac{\overline{OB'}^2}{\overline{ON}^2} = \frac{\text{aire } OA'B'}{\text{aire } OPN} = \frac{\text{aire } OQ'R'}{\text{aire } OPN} = \frac{OQ_0 \cdot R'R_0 - Q'Q_0 \cdot OR_0}{ON \cdot OP} ,$$

et par suite

$$\overline{OB'}^2 = \frac{ON}{OP} (OQ_0 \cdot R'R_0 - Q'Q_0 \cdot OR_0) .$$

Mais

$$R'R_0 \frac{ON}{OP} = R_0N = OQ_0 ,$$

$$Q'Q_0 \frac{ON}{OP} = Q_0N = OR_0 ,$$

ce qui donne

$$\overline{OB'}^2 = \overline{OQ_0}^2 - \overline{OR_0}^2 = \overline{R_0N}^2 - \overline{OR_0}^2 ,$$

résultat conforme à la construction examinée.

E. Cantoni, Viadana (Mantova).

A propos d'un théorème de M. Zervos sur les racines des équations algébriques.

Dans *L'Ens. mathém.* du 16 juillet 1904, (6e année, p. 297-299), M. Zervos examine le théorème suivant :

Si dans un polynome entier avec tous ses termes positifs, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, le rapport d'un coefficient au précédent ne va pas en croissant, l'équation qu'on a en égalant le polynome à zéro a nécessairement des racines imaginaires.

Or, il est facile de former des exemples qui ne vérifient pas ce théorème.

Soit, par exemple, l'équation

$$3x^2 + 2x + \frac{1}{12} = 0 ,$$

donnant

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{6} ,$$