

# propos d'un théorème sur le triangle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tome VI, p. 176; tome VII, p. 344 et tome VIII, p. 55); cette année enfin, l'Université de Louvain a littéralement calqué l'enseignement donné à l'École militaire, dans ses « Notes du Cours de Géométrie descriptive de l'Université catholique de Louvain », notes publiées sans nom d'auteur (Louvain, 1904).

On peut donc affirmer qu'en Belgique, l'évolution prévue en 1893 (*Mathesis*, 1893, p. 45) a été complète et rapide; nous pouvons ajouter qu'il en est résulté un progrès considérable, comme le prouvent annuellement, jusqu'à l'évidence, les examens d'entrée à l'École militaire.

Signalons encore qu'en Portugal, le Cours de Géométrie descriptive de l'École polytechnique, publié en 1899 par L. P. da Motta PEGADO se borne à n'employer que la direction de la ligne de terre.

(*Les Mathématiques en Portugal au XIX<sup>e</sup> siècle*, par R. GUIMARAES, p. 77. Coïmbre, 1900.

F. CHOMÉ (Bruxelles).

### Une nouvelle règle à calculs.

La règle à calculs circulaire CH. CHARPENTIER, qui a été signalée aux lecteurs de cette Revue par M. H. LAURENT (Paris), vient d'être mise en vente, au prix de fr. 18.—, chez les principaux opticiens. On peut aussi l'obtenir directement en s'adressant à l'inventeur M. Ch. Charpentier, Ingénieur, à Valdoie-Belfort (France).

### A propos d'un théorème sur le triangle.

Le théorème de M. Kariya publié dans notre numéro de mars 1904 (p. 130 à 132) et les intéressantes remarques qu'il a provoquées (p. 236-239, 406-411) nous en procurent encore de nouvelles que nous résumons ci-après.

#### VIII. — Lettre de M. BARBARIN (Bordeaux) :

Dans la note sur le théorème de M. Kariya, p. 238, le lecteur est prié de faire la rectification suivante :

ligne 16 : lire  $\alpha'_1$  et  $\alpha'_2$  au lieu de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$

ligne 17 : lire  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  au lieu de  $\alpha'_1$   $\alpha'_2$

ligne 24 : lire  $\frac{p-c}{p-b}$  au lieu de  $\frac{p-b}{p-c}$

#### IX. — Lettre de M. CANTONI (Viadano, Mantova, Italie).

a) La proposition suivante admet comme cas particulier celui qui a été indiqué par M. KARIYA.



thétique de  $XYZ$  et  $K_1K_2K_3$  sera un point  $P$  situé sur la droite  $GK$ . Et puisque le barycentre de  $XYZ$  et le point de Gergonne de  $K_1K_2K_3$  sont sur  $GK$ , le barycentre de  $K_1K_2K_3$  et le point de Gergonne de  $XYZ$  se trouveront aussi sur la même droite. Nous aurons donc le théorème :

Le point de Lemoine d'un triangle est situé sur la droite joi-

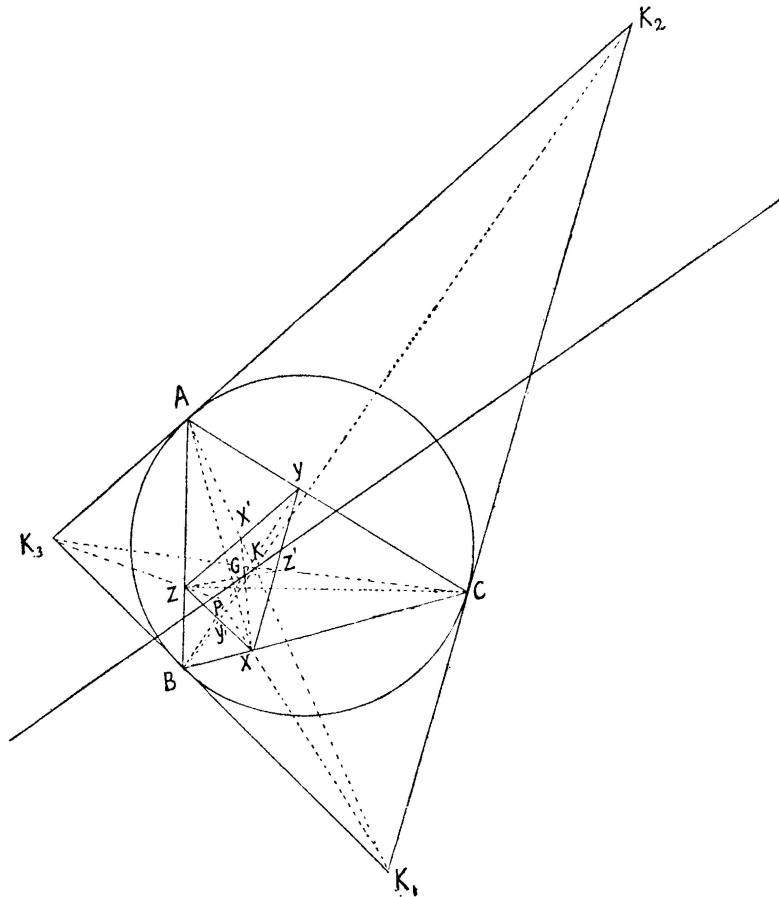


Fig. 1.

crivons le cercle inscrit au triangle et touchant les côtés en  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et décrivons d'un rayon arbitraire un autre cercle concentrique au premier qui coupe les côtés du triangle en  $D$ ,  $D'$ ,  $E$ ,  $E'$ ,  $F$ ,  $F'$ . Il en résultera manifestement :

$$\begin{aligned} DA' &= A'D' & EB' &= B'E' & FC' &= C'F' \\ AC' &= AB' & BC' &= BA' & CA' &= CB' \end{aligned}$$

et les couples de droites  $FE'$  et  $F'E$ ,  $DF'$  et  $D'F$ ,  $DE'$  et  $D'E$  seront respectivement parallèles à  $C'B'$ ,  $C'A'$ ,  $A'B'$ . On peut considérer les six points  $D$ ,  $D'$ ,  $E$ ,  $E'$ ,  $F$ ,  $F'$  comme intersections des côtés du triangle fondamental avec les côtés du triangle  $PQR$ , ou bien de  $P'Q'R'$  en désignant par  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  les points de rencontre des trois couples de droites que je viens de considérer.

gnant le barycentre de son triangle orthique au barycentre du triangle formé des tangentes au cercle circonscrit menées par les sommets. Sur cette droite sont situés aussi le point de Gergonne du triangle orthique et le point de concours des droites joignant les sommets du triangle formé par les tangentes aux pieds homologues des hauteurs du triangle fondamental.

*d)* Soit encore  $ABC$  le triangle fondamental ; dé-

Remarquons que les triangles  $FE'P$ ,  $C'B'A'$ ,  $F'EP'$  sont deux à deux homothétiques,  $A$  étant le centre d'homothétie, et que par suite les points  $A, P, A', P'$  sont en ligne droite. De même on a la collinéation des points  $B, Q, B', Q'$  et  $C, R, C', R'$  et par conséquent les triangles  $PQR$  et  $P'Q'R'$  sont homothétiques à  $A'B'C'$ , le centre d'homothétie étant au point de Gergonne  $G$  du triangle fondamental. Il est manifeste alors que les côtés de tout triangle homothétique à  $A'B'C'$ ,  $G$  étant le centre d'homothétie, détermineront sur les côtés du triangle fondamental six points situés sur un cercle concentrique au cercle inscrit. En particulier les trois parallèles aux côtés de  $A'B'C'$  menées par  $G$  détermineront le cercle de Adams.

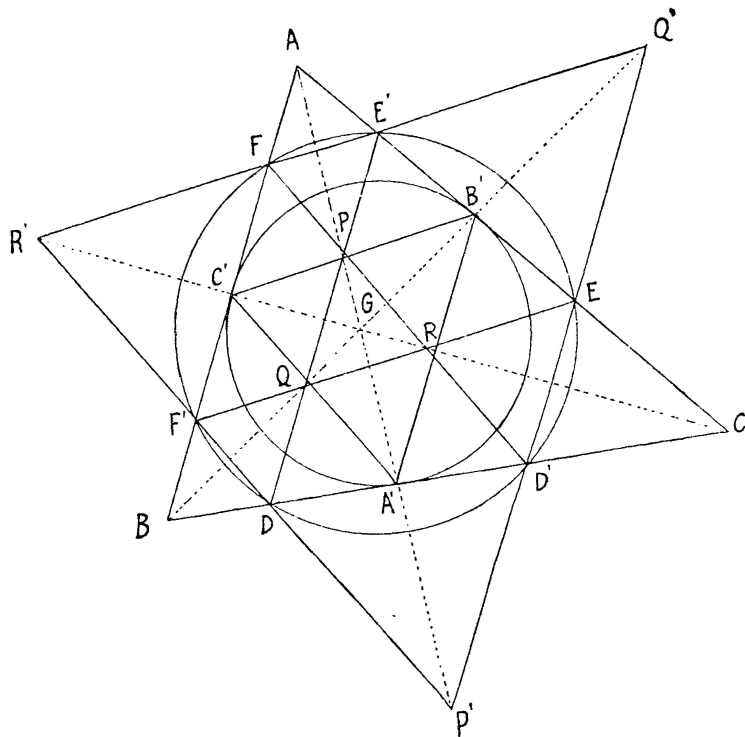


Fig. 2.

E. CANTONI.

X. — Lettre de M. DANIELS (Fribourg, Suisse) :

1. M. G. FRANKE (*Ens. Math.* VI, p. 407-409) démontre le théorème suivant :

Si  $D_1D_2D_3$  sont les milieux des côtés d'un triangle,  $M$  le centre du cercle circonscrit, les droites  $A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3$  passent par un point de la droite d'Euler, pourvu que  $M_1M_2M_3$  satisfassent aux conditions :

$$(D_1MM_1) = (D_2MM_2) = (D_3MM_3) .$$

Ce théorème n'est cependant qu'un cas spécial de celui-ci :

Si  $D_1D_2D_3$  sont les milieux des côtés,  $P$  un point quelconque, les droites  $A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3$  passent par un point  $P'$  situé sur la droite qui relie le point  $P$  au centre de gravité  $G$ , pourvu que  $P_1P_2P_3$  satisfassent aux conditions :

$$(D_1PP_1) = (D_2PP_2) = (D_3PP_3) \equiv \lambda .$$

La position du point  $P'$  est déterminée par l'équation :

$$(GPP') = \frac{2}{3}\lambda .$$

2. En effet, nous avons d'abord pour les milieux des côtés.

$$D_1 \equiv \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \quad D_2 \equiv \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \quad D_3 \equiv \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 ,$$

et si le point  $P$  est

$$P \equiv x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3 ,$$

les points  $P_1, P_2, P_3$  seront

$$P_1 \equiv -\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2} - \frac{\lambda(x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3)}{x_1 + x_2 + x_3} ,$$

ou encore

$$P_1 \equiv -2\lambda x_1\mathbf{r}_1 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_2)\mathbf{r}_2 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_3)\mathbf{r}_3$$

etc. ; les droites  $\Lambda_1 P_1, \Lambda_2 P_2, \Lambda_3 P_3$  passent donc par le point

$$P' \equiv (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_1)\mathbf{r}_1 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_2)\mathbf{r}_2 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_3)\mathbf{r}_3$$

qui, si nous introduisons les vecteurs  $\mathbf{r}_g$  et  $\mathbf{r}_p$  du centre de gravité et du point  $P$  peut s'écrire :

$$P' \equiv 3\mathbf{r}_g - 2\lambda\mathbf{r}_p .$$

Il s'ensuit

$$(GPP') = \frac{2\lambda}{3} .$$

3. Si l'on prend p. ex. pour  $P$  le centre du cercle inscrit

$$P \equiv a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3$$

et  $\lambda = 1$ , les transversales angulaires  $\Lambda_1 P_1, \Lambda_2 P_2, \Lambda_3 P_3$  sont parallèles aux droites  $PD_1, PD_2, PD_3$  et le point  $P'$  devient

$$P' \equiv (a_2 + a_3 - a_1)\mathbf{r}_1 + (a_3 + a_1 - a_2)\mathbf{r}_2 + (a_1 + a_2 - a_3)\mathbf{r}_3$$

c. à. d. le point de Nagel. Il s'ensuit 1° que les transversales angulaires du point de Nagel  $N$  sont parallèles aux droites qui relient le centre du cercle inscrit  $I$  aux milieux des côtés. 2° que  $G, I$  et  $N$  sont sur une droite et 3° que  $(GIN) = \frac{2}{3}$ . Si  $N_1 N_2 N_3$  sont les autres points du groupe de Nagel et  $I_1 I_2 I_3$  les centres des cercles exinscrits, on a de même

$$(GI_1 N_1) = (GI_2 N_2) = (GI_3 N_3) = \frac{2}{3} .$$

4. La relation  $(GPP') = \frac{2\lambda}{3}$  ou  $\frac{GP'}{GP} = \frac{2\lambda}{2\lambda-3}$  nous prouve, que les figures décrites par les points correspondants P et P' sont semblable, si  $\lambda$  est constant. Leur centre de similitude est alors G.

M. FR. DANIELS.

XI. — Lettre de M. C. STOLP (Kampen, Hollande) :

a) *A propos de la lettre de M. Barbarin.*

1. Le cercle circonscrit au triangle ABC et la conique I, lieu du point de Kariya, ont pour quatrième point d'intersection

$$x(r - R \cos A) = y(r - R \cos B) = z(r - R \cos C),$$

ce qui est aisé à vérifier.

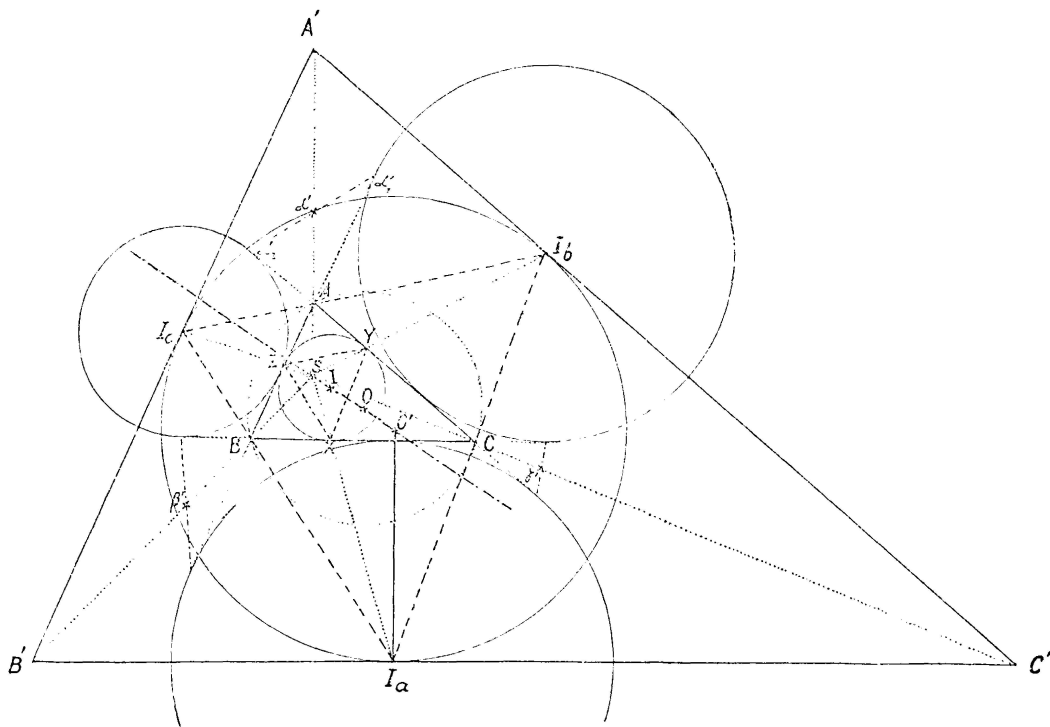


Fig. 3.

2. Comme nous verrons, on connaît depuis longtemps le point  $g'$  de M. Barbarin. Nommons  $I, I_a, I_b, I_c$  les centres des cercles tritangents ;  $r, r_a, r_b, r_c$  leurs rayons ; XYZ les contacts du cercle inscrit avec BC, CA, AB ; O et O' les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et  $I_a I_b I_c$  ; S le centre d'homothétie des triangles  $I_a I_b I_c$  et XYZ,  $g$  et  $g'$  leurs barycentres ; on sait que les points S, O',  $g, g'$  se trouvent sur la droite IO (Voir : CASEY, *A sequel to Euclid*, Suppl. Chapt. Sect. VIII, Tritangent circles). Considérons en particulier le point S.<sup>1</sup> Pour en trouver les coor-

<sup>1</sup> Le point S, notation de Casey, correspond au point  $\phi'$ , notation de M. Barbarin.

données trilinéaires, menons par  $l_a, l_b, l_c$  les droites  $B'C', C'A', A'B'$  parallèles à  $BC, CA, AB$ . Les trois droites (en même temps tangentes au cercle  $l_a l_b l_c$ ) déterminent un triangle  $\Lambda'B'C'$  homothétique avec  $ABC$  par rapport au centre  $S$ . Les coordonnées  $y', z'$  du sommet  $\Lambda'$  étant  $-r_b, -r_c$ , la droite  $\Lambda A'$  a pour équation

$$\frac{y}{r_b} = \frac{z}{r_c} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\text{tang} \frac{B}{2}} = \frac{z}{\text{tang} \frac{C}{2}}$$

On en conclut que les droites  $\Lambda A', BB', CC'$  concourent au point

$$\frac{x}{\text{tang} \frac{A}{2}} = \frac{y}{\text{tang} \frac{B}{2}} = \frac{z}{\text{tang} \frac{C}{2}},$$

inverse du point  $\varphi$  (page 238), et l'on observe que les points  $\varphi'$  et  $S$  sont identiques.

*b) A propos de la lettre de M. HAROLD HILTON (page 237).*

M. Hilton remarque que les triangles  $ABC, DEF$  sont réciproques par rapport à une circonférence de cercle. Il s'ensuit qu'on peut regarder comme donné *l'un ou l'autre* des deux triangles.

Si l'on choisit  $DEF$  pour triangle de référence,  $k$  étant le rayon de son cercle circonscrit, et qu'on désigne par  $\xi, \eta, \zeta$  les distances d'un point quelconque aux côtés  $EF, FD, DE$ , on trouvera que la droite  $AD$  a pour équation

$$\eta(k \cos F \cos D + r \cos E) = \zeta(k \cos D \cos E + r \cos F)$$

et que  $AD, BE, CF$ , passent par le point  $P$

$$\xi(k \cos E \cos F + r \cos D) = \eta(k \cos F \cos D + r \cos E) = \zeta(k \cos D \cos E + r \cos F).$$

En faisant  $r = 0, r = \infty, r = k$  le point  $P$  coïncide avec les points suivants du triangle  $DEF$  : le centre  $O$  du cercle circonscrit, l'orthocentre  $H$ , le point de Lemoine  $K$ . Supposons les points  $D, E, F$  fixes ; si l'on fait varier  $r$  le point  $P$  décrit une conique qui, passant par les sommets du triangle  $DEF$  et par son orthocentre, est une hyperbole équilatère. Son inverse est la droite d'Euler qu'elle coupe aux points  $H, O$ .

C. STOLP.

**XII.** — La Géométrie du triangle est une mine inépuisable de constructions et de propriétés des plus intéressantes. Les lettres qui nous sont adressées à propos de l'article de M. Kariya le prouvent suffisamment. Nous devons nous borner à mentionner



encore les lettres de MM. Ant. PLESKOT (Pilsen) et Aug. TAFELMACHER (Santiago du Chili).

M. PLESKOT fait intervenir le triangle  $A_1B_1C_1$ , polaire réciproque du triangle ABC par rapport à une conique arbitraire. Il prend ensuite pour conique un cercle de centre O ; puis envisageant pour O quelques positions particulières, il obtient quelques propriétés très simples et les propriétés corrélatives en vertu du principe de Dualité. L'une de ces propriétés est précisément celle qu'exprime le théorème énoncé par M. Kariya.

M. TAFELMACHER nous signale une Note *sur les coordonnées homogènes obliques*, destinée à la *Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht*, dans laquelle il donne une démonstration du théorème de Kariya. On y trouvera, entre autres, l'expression de la puissance de point K par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC.

LA RÉDACTION.

---

## CHRONIQUE

---

### Paul Tannery.

Les sciences mathématiques et historiques viennent de faire une grande perte en la personne de M. *Paul Tannery*, directeur de la manufacture des tabacs de Pantin, décédé le 27 novembre dernier à l'âge de 61 ans. Sa mort subite a été une douloureuse surprise pour tous ceux qui l'ont connu et tout particulièrement pour ceux qui ont encore eu l'occasion de l'approcher au Congrès des mathématiciens à Heidelberg et au Congrès de philosophie et d'histoire des sciences à Genève.

Ancien élève de l'École polytechnique de Paris, Tannery sortit dans le corps des ingénieurs des tabacs, où il suivit régulièrement la carrière, ce qui ne l'empêcha pas de rester en contact avec la science pure. Il consacra ses loisirs principalement à l'histoire des sciences et à la philosophie. D'une remarquable érudition pour tout ce qui touche à l'histoire des sciences, il était connu aussi bien des mathématiciens et des physiciens, que des hellénistes et des philologues. Il fut l'un des principaux organisateurs des congrès d'histoire des sciences. Ses travaux ont été publiés notamment dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, l'*Archiv für Geschichte der Philosophie*, la *Revue de philosophie*, la *Revue des Etudes grecques*, la *Revue de Philologie*, et dans *Bibliotheca*