

SUR LES DÉMONSTRATIONS DE DEUX FORMULES POUR LE CALCUL DES NOMBRES DE BERNOULLI

Autor(en): **Teixeira, F. Gomes**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-8450>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\text{arc sin } x, \cos x, \log \frac{1+x}{1-x}, \log(x + \sqrt{1+x^2}), e^x \pm e^{-x},$$

$$(x + \sqrt{1+x^2})^m \pm (x + \sqrt{1+x^2})^{-m} \text{ etc...}$$

W. ERMAKOFF (Kief).

(Traduction de M. D. Mirimanoff, Genève).

NOTE DE LA RÉDACTION. — Nous apprenons que M. Tchapyguine, professeur à l'Université de Moscou, ayant remarqué que les fonctions considérées dans l'article précédent sont des intégrales d'équations différentielles linéaires du 1^{er} et du 2^{me} ordre, essaya de généraliser les procédés dont s'est servi l'auteur de ce travail. A la suite d'une correspondance qui s'engagea alors entre M. Tchapyguine et M. Ermakoff, il fut reconnu qu'il était possible de donner un procédé général permettant de calculer approximativement les intégrales d'équations différentielles quelconques. Ces intégrales peuvent être exprimées au moyen de formules simples qui dans l'intervalle donné représentent ces intégrales avec une approximation donnée. Les recherches de M. Tchapyguine paraîtront prochainement dans un périodique mathématique.

SUR LES DÉMONSTRATIONS
DE DEUX FORMULES POUR LE CALCUL DES NOMBRES
DE BERNOULLI

I. — Nous allons nous occuper, en premier lieu, de la formule bien connue

$$B_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{2^{2n}-1} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \left[i^{2n-1} - i(i-1)^{2n-1} + \binom{i}{2} (i-2)^{2n-1} \right. \\ \left. - \binom{i}{3} (i-3)^{2n-1} + \dots \pm \binom{i}{i-1} 1^{2n-1} \right],$$

où B_{2n-1} représente les *nombre de Bernoulli*.

On trouve une démonstration de cette formule dans le *Calcul intégral de Serret* (2^e édit., p. 225) et nous en avons donné une autre dans notre *Curso de Analyse* (Calculo diferencial, 3^e édit., p. 237). Mais nous allons l'obtenir ici par une analyse plus simple que celle que l'on trouve dans ces deux traités, au moyen de la formule connue (HERMITE, Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique, p. 60) :

$$y^{(n)} = n! \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{i!} f^{(i)}(u) ,$$

où

$$A_i = \frac{1}{n!} \left[(u^i)^{(n)} - i(u^{i-1})^{(n)} u + \binom{i}{2} (u^{i-2})^{(n)} u^2 \dots \right] ,$$

laquelle donne la dérivée d'ordre n de y par rapport à x , quand $y = f(u)$ et u est une fonction donnée de x .

Pour cela, appliquons cette formule à la fonction

$$y = (1 + e^x)^{-1} .$$

On a, en posant $y = u^{-1}$, $u = 1 + e^x$,

$$y^{(n)} = n! \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{A_i}{(1 + e^x)^{i+1}} ,$$

où

$$A_i = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \binom{i}{k} \frac{d^n (1 + e^x)^{i-k}}{dx^n} (1 + e^x)^k .$$

Mais

$$(1 + e^x)^{i-k} = 1 + (i - k) e^x + \binom{i - k}{2} e^{2x} + \dots + e^{(i-k)x} ,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{d^n (1 + e^x)^{i-k}}{dx^n} &= (i - k) e^x + \binom{i - k}{2} 2^n e^{2x} + \binom{i - k}{3} 3^n e^{3x} + \dots \\ &\quad + (i - k)^n e^{(i-k)x} , \end{aligned}$$

et, en posant $x = 0$,

$$\left[\frac{d^n (1 + e^x)^{i-k}}{dx^n} \right]_{x=0} = (i-k) + \binom{i-k}{2} 2^n + \binom{i-k}{3} 3^n + \dots + (i-k)^n$$

Donc on a

$$y_0^{(n)} = n! \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{A_i}{2^{i+1}},$$

où

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \binom{i}{k} 2^k \sum_{t=0}^{i-k} \binom{i-k}{t} t^n \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{t=0}^{i-1} t^n \sum_{k=0}^{i-t} (-1)^k \binom{i}{k} \binom{i-k}{t} 2^k. \end{aligned}$$

Mais, puisque

$$\binom{i}{k} \binom{i-k}{t} = \binom{i}{t} \binom{i-t}{k},$$

nous pouvons écrire l'identité

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{i-t} (-1)^k \binom{i}{k} \binom{i-k}{t} 2^k &= \sum_{k=0}^{i-t} (-1)^k \binom{i}{t} \binom{i-t}{k} 2^k \\ &= \binom{i}{t} \sum_{k=0}^{i-t} (-1)^k \binom{i-t}{k} 2^k = \binom{i}{t} (1-2)^{i-t} = (-1)^{i-t} \binom{i}{t}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$A_i = \frac{1}{n!} \sum_{t=1}^{i-1} (-1)^{i-t} \binom{i}{t} t^n,$$

et

$$y_0^{(n)} = \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \left[i^n - i(i-1)^n + \binom{i}{2} (1-2)^n - \dots \pm \binom{i}{i-1} 1^n \right].$$

En employant maintenant la formule

$$B_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{2^{2n}-1} y_0^{(2n-1)},$$

qui lie les nombres de Bernoulli aux dérivées de la fonction considérée, on obtient la formule qu'on a écrite précédemment.

II. — La deuxième formule pour le calcul des nombres de Bernoulli que nous allons considérer, fut attribuée à LIBRI par CAUCHY (*Œuvres*, 2^e série, t. VII, p. 348). On peut l'obtenir immédiatement au moyen de la formule

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum \frac{n! f^{(i)}(u) u'^\alpha u''^\beta \dots (u^{(n)})^\lambda}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda},$$

où Σ représente une somme qui se rapporte aux solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + n\lambda = n$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda,$$

laquelle donne la dérivée d'ordre n de y par rapport à x , quand $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

En appliquant, en effet, cette formule à la fonction

$$y = \log \frac{\pi x}{\sin \pi x} = -\log \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \dots \right),$$

on trouve, en posant $n = 2m$, et

$$y = -\log u, \quad u = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \dots,$$

l'égalité suivante :

$$\left(\frac{d^{2m} y}{dx^{2m}} \right)_{x=0} = \pi^{2m} \sum (-1)^i \frac{(i-1)! (2m)!}{\beta! \delta! \dots} \left(-\frac{1}{3!} \right)^\beta \left(\frac{1}{5!} \right)^\delta,$$

où Σ représente une somme qui doit s'étendre aux solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\beta + 2\delta + \dots = m,$$

et où

$$i = \beta + \delta + \dots$$

Mais, d'un autre côté, on a

$$\log \frac{\pi x}{\sin \pi x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m-1} \pi^{2m}}{m (2m)!} B_{2m-1} x^{2m}.$$

On trouve donc

$$B_{2m-1} = \frac{m(2m)!}{2^{2m-1}} \sum (-1)^i \frac{(i-1)!}{\beta! \delta! \omega! \dots} \left(-\frac{1}{3}\right)^\beta \left(\frac{1}{5}\right)^\delta \left(-\frac{1}{7}\right)^\omega \dots$$

Cette formule est celle que nous nous proposons d'obtenir.

F. GOMES TEIXEIRA (Porto).

LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

Les études que nous avons successivement publiées dans cette Revue¹ sur les Principes de la Géométrie appellent rationnellement, à titre de conclusion, une vue d'ensemble sur la Géométrie tout entière.

Etablir les axiomes de la Géométrie, c'est réduire cette science à être une *application* d'une théorie plus générale et indépendante de tout élément géométrique.

La théorie plus générale dont la Géométrie est une simple application n'est autre que celle des *ensembles*.

Cette théorie, dont la terminologie a été abondamment utilisée, dans ces dernières années, dans de nombreux travaux sur l'Analyse numérique, a reçu peu de développement en ce qui concerne ses parties les plus générales, bien que tous les éléments essentiels de la théorie intégrale des ensembles semblent réunis dans l'œuvre géniale de G. Cantor.

¹ *L'Ens. Math.*, 7^e année, p. 270-291 ; p. 375-381.